

*ELETTRONICA*

*E*

*TELECOMUNICAZIONI*

*V INFORMATICA*

*ITISV.Volterra*

San Donà di Piave

Versione [09/2011.1]

# Indice

<b>1</b>	<b>Presentazione del corso</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Analisi dei circuiti</b>	<b>5</b>
2.1	L'alternata . . . . .	5
2.1.1	Grandezze continue e grandezze alternate . . . . .	5
2.1.2	L'intensità di corrente in a.c. . . . .	6
2.1.3	I parametri delle grandezze alternate sinusoidali . . . . .	7
2.1.4	Rappresentazione vettoriale delle grandezze alternate . . . . .	8
2.1.5	Il valore efficace . . . . .	11
2.1.6	Il valore simbolico . . . . .	14
2.1.7	Esercizi . . . . .	15
2.2	Componenti elettrici in a.c. . . . .	16
2.2.1	Il resistore in a.c. . . . .	16
2.2.2	Il condensatore in a.c. . . . .	18
2.2.3	L'induttore . . . . .	20
2.2.4	Questionario riepilogativo . . . . .	34
2.2.5	Esercizi . . . . .	35
2.3	Risoluzione delle reti in a.c. con il metodo simbolico . . . . .	36
2.4	I filtri . . . . .	36
2.4.1	Il concetto di filtro . . . . .	36
2.4.2	Filtri reali . . . . .	41
2.4.3	Questionario riepilogativo . . . . .	59
2.4.4	Esercizi . . . . .	59
2.5	Circuiti risonanti . . . . .	61
2.5.1	La risonanza . . . . .	61
2.5.2	La qualità . . . . .	65
2.5.3	Circuito risonante serie - analisi simbolica . . . . .	70
2.5.4	Circuito risonante parallelo - analisi simbolica . . . . .	75
2.5.5	Questionario riepilogativo . . . . .	77
2.5.6	Esercizi . . . . .	78

<b>3</b>	<b>Analisi dei segnali</b>	<b>79</b>
3.1	I segnali e le loro caratteristiche . . . . .	79
3.2	Composizione di segnali trigonometrici . . . . .	82
3.3	Il teorema di Fourier . . . . .	83
3.3.1	La rappresentazione spettrale . . . . .	85
3.3.2	Esempio 1 . . . . .	87
3.3.3	Funzioni pari e funzioni dispari . . . . .	87
3.3.4	Analisi spettrale di un'onda quadra . . . . .	89
3.3.5	La serie di Fourier in forma esponenziale . . . . .	92
3.4	La trasformata di Fourier . . . . .	94
3.4.1	L'impulso rettangolare . . . . .	98
3.4.2	Quesiti ed esercizi . . . . .	101
<b>4</b>	<b>Introduzione alle telecomunicazioni</b>	<b>102</b>
4.1	Il sistema delle telecomunicazioni . . . . .	102
4.1.1	Schematizzazione a blocchi del sistema . . . . .	102
4.1.2	Il Trasmettitore . . . . .	104
4.1.3	Il ricevitore . . . . .	106
4.1.4	Trasmissioni analogiche e trasmissioni numeriche . . . . .	107
4.1.5	La multiplazione . . . . .	108
4.2	Evoluzione storica dei sistemi di telecomunicazione . . . . .	112
4.2.1	Telefonia . . . . .	112
4.2.2	Radiofonia . . . . .	113
4.2.3	La rete telefonica . . . . .	116
4.2.4	La rete telematica . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Le trasmissioni via cavo</b>	<b>119</b>
5.1	Lo schema generale delle trasmissioni via cavo . . . . .	119
5.1.1	Caratteristiche trasmissive . . . . .	120
5.1.2	Il livello del segnale in $dB_m$ e l'attenuazione . . . . .	123
5.1.3	La condizione per il massimo trasferimento di energia . . . . .	124
5.2	Il modello elettrico di una linea . . . . .	126
5.2.1	Le costanti primarie . . . . .	126
5.2.2	Le equazioni di propagazione . . . . .	129
5.2.3	Le soluzioni delle equazioni di propagazione . . . . .	131
5.2.4	Onda riflessa e onda stazionaria . . . . .	141
5.2.5	Questionario riepilogativo . . . . .	151
5.2.6	Esercizi di calcolo . . . . .	152

<b>6</b>	<b>Le trasmissione via etere</b>	<b>153</b>
6.1	Lo schema a blocchi della trasmissione . . . . .	153
6.2	Le onde elettromagnetiche . . . . .	154
6.2.1	Le onde radio . . . . .	157
6.3	Le antenne - Caratteristiche generali . . . . .	158
6.3.1	Il dipolo hertziano . . . . .	161
6.3.2	Il dipolo marconiano . . . . .	163
6.3.3	Le antenne Yagi . . . . .	163
6.3.4	Le antenne paraboliche . . . . .	164
<b>7</b>	<b>Le trasmissioni con fibra ottica</b>	<b>165</b>
7.1	Lo schema a blocchi della trasmissione . . . . .	165
7.2	La luce . . . . .	166
7.2.1	Riflessione . . . . .	166
7.2.2	Rifrazione . . . . .	167
7.3	Le fibre ottiche . . . . .	168
<b>8</b>	<b>Modulazioni e codifiche</b>	<b>170</b>
8.1	Le modulazioni analogiche . . . . .	170
8.1.1	La modulazione . . . . .	170
8.1.2	La modulazione d'ampiezza . . . . .	171
8.1.3	La modulazione di frequenza . . . . .	173
8.1.4	La modulazione d fase . . . . .	175
8.1.5	Espressioni matematiche dei segnali . . . . .	177
8.2	Le codifiche numeriche . . . . .	186
8.2.1	Il segnale dei dati . . . . .	186
8.2.2	La velocità di trasmissione . . . . .	187
8.2.3	Lo spettro del segnale numerico . . . . .	188
8.2.4	Il codice Manchester . . . . .	189
8.2.5	La codifica della fast Ethernet . . . . .	191
8.2.6	Il teorema di Shannon sulla capacità di informazione . . . . .	192
8.2.7	Esempio . . . . .	193
8.3	Esercizi . . . . .	194

# Capitolo 1

## Presentazione del corso

Il tema di studio nel quinto anno è quello delle *telecomunicazioni*, cioè delle connessioni a distanza tra due o più dispositivi.

Il tema ha acquisito importanza via via crescente proprio in questi ultimi anni, con lo sviluppo delle reti di computer, una branca delle telecomunicazioni denominata *telematica*.

Sono tematiche ampie, che, all'interno della specializzazione ad indirizzo informatico, vengono affrontate, a *livello esplorativo*, in due fasi distinte:

- in un primo momento, corrispondente al 1° quadrimestre, vengono esaminati i *concetti di base*, necessari per comprendere le applicazioni;
- successivamente, nel 2° quadrimestre, si entra nello specifico delle *applicazioni*.

Data l'ampiezza del materiale, per scegliere e collegare tra loro i contenuti, l'esplorazione segue una *linea guida*, che può essere ulteriormente specificata, o tracciata liberamente, dal docente.

Essa fa riferimento ai *caratteri* che hanno determinato l'evoluzione storica delle telecomunicazioni, dai primi *sistemi analogici*, fino ai più recenti *sistemi numerici*, non con l'intento di svilupparne ogni aspetto, quanto invece per comprendere la *logica* che ne sottende lo sviluppo e la realizzazione.

# Capitolo 2

## Analisi dei circuiti

### 2.1 L'alternata

#### 2.1.1 Grandezze continue e grandezze alternate

##### Grandezze continue

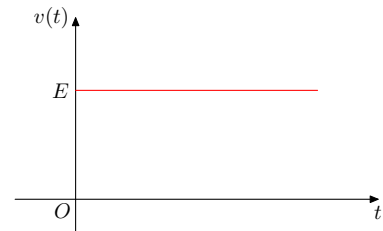
Una grandezza continua (*D.C.*) è una grandezza che mantiene costante il proprio valore nel tempo.

Esempio: La tensione continua di alimentazione di una circuito elettrico, fornita da una pila o da un alimentatore. La tensione di riferimento di un ADC (Convertitore Analogico Digitale). Etc.

Una pila eroga, infatti, idealmente una tensione fissa, pari alla sua *f.e.m.*

Per descrivere una grandezza continua è sufficiente un solo parametro di ampiezza, corrispondente all'unico valore che la grandezza assume nel tempo.

*Ampiezza(D.C.)* :  $V = E = 12 \text{ Volt}$

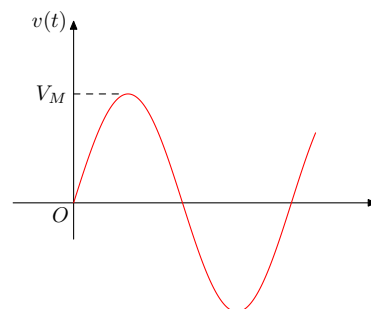


##### Grandezze alternate sinusoidali

Una grandezza alternata (*a.c.*) è una grandezza che modifica il proprio valore nel tempo, alternando ciclicamente valori positivi e corrispondenti valori negativi.

Una grandezza alternata sinusoidale è una grandezza alternata che segue l'andamento della funzione seno.

In generale l'*andamento* segue una *forma d'onda* specifica ed è *simmetrico*, poiché i valori negativi ripetono con polarità invertita, il susseguirsi dei valori positivi. Ne consegue che una grandezza alternata ha *valore medio* nullo.



Ad ogni istante temporale la grandezza prende uno ed un solo valore, ed è rappresentabile analiticamente attraverso una *funzione* matematica della variabile *tempo*. Se la grandezza è una *d.d.p.*,  $v$ , indicheremo la funzione con  $v(t)$ , ovvero ripetendo il nome della variabile:

$$v = v(t)$$

Per una corrente  $i$ , indicheremo analogamente la funzione con  $i(t)$ , etc., scrivendo in questo caso:

$$i = i(t)$$

Le principali forme d'onda sono:

- sinusoidale
- onda quadra
- onda triangolare

Nel seguito faremo riferimento espressamente alle sole grandezze alternate sinusoidali.

Esempio: La tensione di rete. La *d.d.p.* fornita da un alternatore. La tensione fornita da un circuito oscillatore. Etc.

### 2.1.2 L'intensità di corrente in a.c.

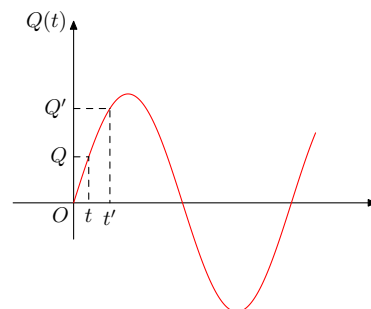
Avevamo definito *l'intensità di corrente elettrica* come la *quantità di carica che attraversa la sezione di un conduttore nell'unità di tempo*. Avevamo poi precisato che, detta  $Q$  la quantità di carica che attraversa la sezione del conduttore nel tempo  $t$ , allora l'intensità di corrente è:

$$I = \frac{Q}{t}$$

In regime alternato questa definizione non è adeguata in quanto ora la quantità di carica elettrica  $Q$  è una funzione del tempo:  $Q = Q(t)$ .

Facendo riferimento al grafico di figura, indicati con  $t$  e  $t'$  due istanti temporali, ai quali corrispondono rispettivamente:  $Q = Q(t)$  e  $Q' = Q(t')$ , definiamo *corrente media* nell'intervallo  $\Delta t = t' - t$  la quantità:

$$I_m = \frac{Q' - Q}{t' - t} = \frac{Q(t') - Q(t)}{t' - t}$$



Notiamo che la corrente media è espressa matematicamente attraverso un *rapporto incrementale*. Facendo il *limite* per  $t'$  tendente a  $t$ , otteniamo la corrente istantanea, all'istante  $t$ :

$$i(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{Q(t') - Q(t)}{t' - t}$$

La corrente istantanea corrisponde matematicamente alla *funzione derivata* della carica elettrica.

Per evitare ambiguità circa la variabile rispetto alla quale viene effettuata l'operazione di derivazione, in ambiente tecnico si preferisce esprimere la derivata mediante il rapporto dei differenziali, nel seguente modo:

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

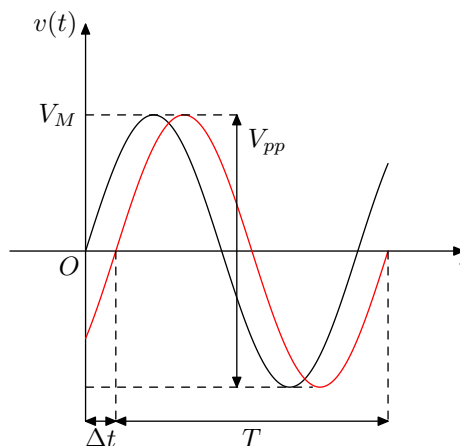
che si legge: *l'intensità di corrente* corrisponde alla *derivata della carica fatta rispetto al tempo*.

### 2.1.3 I parametri delle grandezze alternate sinusoidali

Per descrivere una grandezza alternata sinusoidale sono necessari tre parametri:

- *ampiezza*

Poiché il valore di un segnale alternato cambia nel tempo, per valutare l'ampiezza si fa riferimento al suo *Valore Massimo*,  $V_M$ <sup>1</sup>, corrispondente al massimo valore che la grandezza alternata assume nel picco positivo.



Spesso nella pratica, anziché al valore massimo, si fa riferimento al *Valore picco*



*picco*, il quale corrisponde alla differenza tra il massimo valore del picco positivo ed il minimo del picco negativo. Si ha ovviamente:

$$V_{pp} = 2 \cdot V_M$$

- *frequenza*

La frequenza,  $f$ , corrisponde al numero di cicli che compie il segnale nell'unità di tempo. A parità di ampiezza la frequenza determina quanto velocemente si modifica il segnale nel tempo. Essa è legata *inversamente* al periodo  $T$  del segnale, essendo:

$$f = \frac{1}{T}$$

- *fase iniziale*

Benché la grandezza alternata sinusoidale segua l'andamento di  $\sin(x)$ , che inizialmente vale zero, non è richiesto, in generale, che anche la grandezza alternata sinusoidale passi per l'origine degli assi, ma è possibile che la stessa risulti sfasata, rispetto alla sinusoide pura, di un certo angolo  $\varphi$ , denominato *angolo di fase iniziale*, in ritardo (od in anticipo) se il picco del segnale segue (o precede) il picco della sinusoide.

L'angolo di fase iniziale  $\varphi$  viene determinato facilmente misurando il ritardo (od anticipo) di fase  $\Delta t$  del segnale. Infatti, osservando che ad uno sfasamento di un intero angolo giro corrisponde un ritardo temporale pari al periodo  $T$ , vale la seguente proporzione:

$$T : 2\pi = \Delta t : \varphi$$

Risolvendo rispetto a  $\varphi$ , otteniamo:

$$\varphi = \Delta t \cdot \frac{2\pi}{T}$$

La relazione fornisce il valore di  $\varphi$  in radianti, *RAD*; volendo il valore in gradi sessagesimali, *DEG*, basta sostituire 360 al posto di  $2\pi$ .

### 2.1.4 Rappresentazione vettoriale delle grandezze alternate

Nel mondo fisico una grandezza alternata è generata *movimenti* dati da *vibrazioni*, spesso di ampiezza molto piccola, attorno ad una posizione di equilibrio. Spesso sono anche denominati *moti armonici*.

Sono vibrazioni ad esempio: le oscillazioni della corda di una chitarra, o di un diapason, o di una molla. Queste vibrazioni avvengono in una sola direzione, ma

è possibile creare anche vibrazioni in due direzioni, come quando perquostiamo un tamburo. In questo caso si nota che il movimento creato è di tipo circolare.

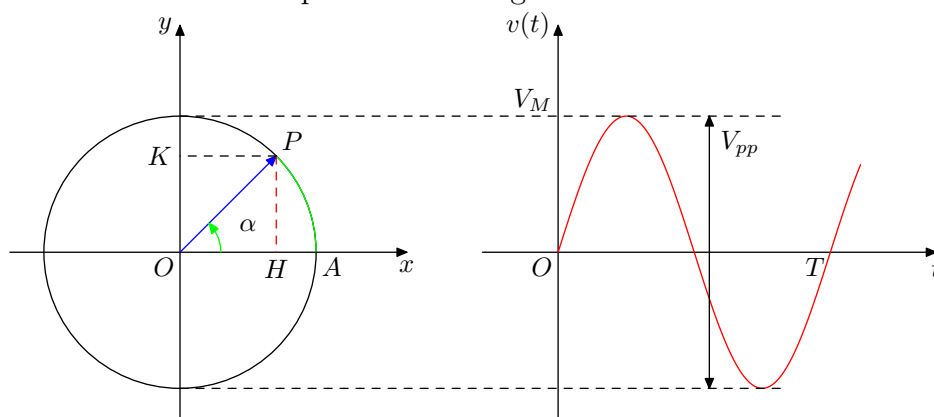
Si dimostra infatti che: *componendo due moti armonici in due direzioni perpendicolari fra loro ed opportunamente sincronizzati, si ottiene come risultato un moto circolare uniforme.*

Viceversa, scomponendo un moto circolare uniforme, nelle due direzioni perpendicolari  $x$  ed  $y$ , si ottengono due moti armonici.

In ambiente tecnico questa proprietà è utilizzata per rappresentare un segnale alternato sinusoidale in forma vettoriale.

### Sinusoide pura

Consideriamo il caso particolare di figura:



Nel sistema di assi cartesiani  $Oxy$  tracciamo la circonferenza con centro nell'origine e raggio pari al valore  $V_M$  del segnale alternato sinusoidale.

Sulla circonferenza consideriamo poi un punto  $P$  che si muova di *moto circolare uniforme* e lo posizioniamo nell'istante iniziale  $t_0 = 0$  nel punto  $A$ .

Dopo il tempo  $t$  esso avrà descritto un arco di circonferenza che sottende l'angolo  $\alpha$  e si sarà portato nel punto  $P$ .

Scomponiamo il moto di  $P$  nei moti delle sue due proiezioni rispettivamente negli assi  $x$  ed  $y$ , rappresentate dai punti  $H$  e  $K$ .

Concentriamo la nostra attenzione nel solo movimento di  $K$  e registriamo la sua posizione rispetto all'origine. Vediamo subito che, man mano che  $P$  si muove sulla circonferenza, la posizione di  $K$  genera proprio il segnale alternato sinusoidale, nel caso particolare in cui la sua *fase iniziale* è *identicamente nulla*.

Notiamo poi che, essendo il moto circolare uniforme, il punto  $P$  si muove con una *velocità angolare costante*,  $\omega$ , ovvero che il rapporto tra l'angolo  $\alpha$  descritto nel movimento nel tempo  $t$  ed il tempo stesso è costante:

$$\frac{\alpha}{t} = \omega = \text{cost.}$$

Poiché dopo un giro completo,  $2\pi$ , il tempo trascorso corrisponde proprio al periodo  $T$  del segnale, avremo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Siamo ora in grado di esprimere matematicamente il segnale alternato. Infatti esso è rappresentato dal segmento

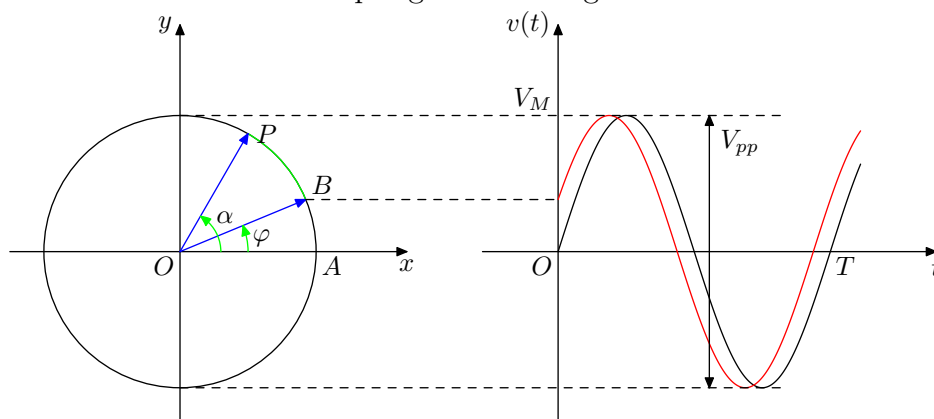
$$\overline{PH} = \overline{OP} \cdot \text{sen}(\alpha)$$

Ricordando che  $\overline{OP} = V_M$  e che  $\alpha = \omega \cdot t$ , otteniamo:

$$v(t) = V_M \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

### Sinusoide con sfasamento iniziale

Consideriamo ora il caso più generale di figura:



Nel sistema di assi cartesiani  $Oxy$  tracciamo nuovamente la circonferenza con centro nell'origine e raggio pari al valore  $V_M$  del segnale alternato sinusoidale.

Consideriamo ora un punto  $P$  che si muova nella circonferenza di *moto circolare uniforme* e lo posizioniamo nell'istante iniziale  $t_0 = 0$  nel punto  $B$ , che forma rispetto al punto  $A$  un angolo iniziale pari a  $\varphi$ .

Dopo il tempo  $t$  esso avrà descritto un arco di circonferenza che sottende l'angolo  $\alpha$  e si sarà portato nel punto  $P$ .

Per costruire il segnale alternato sinusoidale generato dal movimento di  $P$  tracciamo dapprima il grafico come se  $P$  si fosse trovato inizialmente in  $A$ . Ciò ci consente di rappresentare correttamente il *periodo* nell'asse delle ascisse. Fatto ciò riportiamo sul grafico l'ordinata di  $B$ , individuando così l'anticipo o il ritardo di fase del segnale rispetto alla sinusoide pura, che, nel grafico, il segnale dovrà mantenere per tutto il ciclo.

Ora la *velocità angolare*,  $\omega$ , è data da:

$$\omega = \frac{\alpha - \varphi}{t}$$

per cui abbiamo:

$$\alpha = \omega \cdot t + \varphi$$

Siamo allora in grado di esprimere matematicamente il segnale alternato. Infatti esso è rappresentato ancora dal segmento

$$\overline{PH} = \overline{OP} \cdot \text{sen}(\alpha)$$

Otteniamo:

$$v(t) = V_M \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi)$$

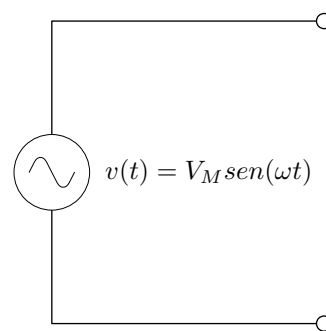
Resta verificato che l'espressione del segnale alternato sinusoidale dipende dai tre parametri: ampiezza, frequenza e fase iniziale.

### 2.1.5 Il valore efficace

Per ottenere una grandezza alternata sinusoidale abbiamo bisogno di un generatore di tensione in *a.c.*.

Per rappresentarlo si può utilizzare il simbolo generale di generatore elettrico ideale di tensione, od anche, il simbolo di figura.

Il segnale prodotto non presenta in genere problemi per quanto concerne la frequenza, che si mantiene costante entro i margini di stabilità in frequenza del generatore, mentre l'ampiezza può risentire dell'effetto di carico, analogamente a quanto avviene per un generatore in continua.



Anche in *a.c.* il generatore elettrico è *ideale* se la *f.e.m.* alternata sinusoidale che presenta ai propri morsetti presenta *ampiezza* costante qualunque sia il carico collegato.

Consideriamo ora una *d.d.p.* alternata con frequenza fissa  $f$ , fase iniziale  $\varphi = 0$  e *valore massimo*  $V_M$ , prodotta da un generatore in *a.c.* e ci proponiamo di confrontarla con una *d.d.p. continua*, prodotta da un generatore in *DC*.

Anche se le forme d'onda prodotte sono molto diverse entrambi i generatori sono in grado di fornire ad un carico l'energia elettrica necessaria per il suo funzionamento. L'energia elettrica trasferita produrrà poi nel carico una serie di effetti che dipenderanno dalla natura del carico stesso: riscaldamento, illuminazione, etc.

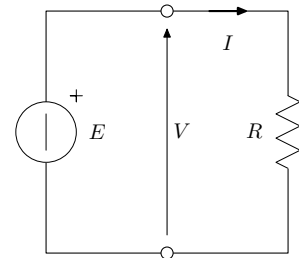
Risulta quindi naturale considerare i due generatori tra loro *equivalenti* se, connessi ad un medesimo carico per un tempo prefissato  $t$ , producono in esso lo stesso trasferimento di energia elettrica, cioè in pratica proprio gli stessi effetti. Se questo avviene, allora il valore di *f.e.m.* del generatore in continua è detto *valore efficace* dell'alternata.

**Definizione 1.** Si definisce *valore efficace di una grandezza alternata*, quel valore che deve avere una grandezza continua per produrre sullo stesso carico gli stessi effetti della grandezza alternata.

Per determinare il valore efficace determiniamo per la *DC* e per l'*a.c.* l'energia elettrica trasferita nell'unità di tempo ad un carico resistivo  $R$ , che sappiamo corrispondere proprio alla *potenza elettrica*.

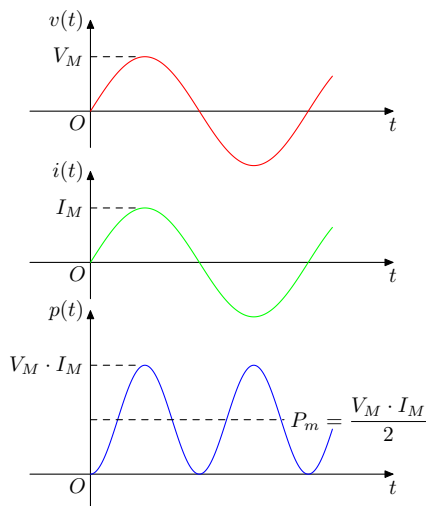
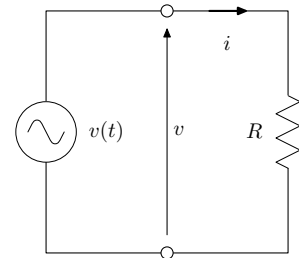
- Resistenza collegata al generatore in *DC*

$$\begin{aligned} V &= E \\ I &= \frac{E}{R} \\ P &= V \cdot I = \frac{E^2}{R} \end{aligned}$$



- Resistenza collegata al generatore in *a.c.*

$$\begin{aligned} v(t) &= V_M \sin(\omega t) \\ i(t) &= \frac{v(t)}{R} = \frac{V_M}{R} \sin(\omega t) \end{aligned}$$



La corrente, come la tensione, è alternata sinusoidale ed è in fase con essa.

Per determinare la potenza elettrica moltiplichiamo tra loro tensione e corrente:

quando la tensione è *positiva* (*negativa*) anche la corrente è *positiva* (*negativa*) e quindi la potenza è in entrambi i casi *positiva*.

Otteniamo il grafico di figura, dal quale comprendiamo anche che la potenza elettrica in *a.c.* non è costante<sup>2</sup>.

Essa alterna momenti in cui è minore ad altri in cui è maggiore, pulsando con una frequenza doppia rispetto a quella della *d.d.p.* ed andando dal valore minimo nullo al valore massimo:  $V_M \cdot I_M$ .

Abbiamo infatti:

$$P = v \cdot i = V_M I_M \sin^2(\omega t) = \frac{V_M I_M}{2} (1 - \cos(2\omega t))$$

Prendiamo allora in considerazione il *trasferimento medio di energia* nell'unità di tempo, cioè la *potenza elettrica media*. Essa è data da:

$$P_m = \frac{V_M \cdot I_M}{2} = \frac{V_M^2}{2R}$$

Confrontiamo ora le potenze elettriche determinate nei due casi. Esse risultano uguali quando:

$$\frac{E^2}{R} = \frac{V_M^2}{2R}$$

Cioè quando:

$$E = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

Tale valore<sup>3</sup> è, quindi, il valore efficace della grandezza alternata:

$$V_{eff} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

Analogamente abbiamo:

$$I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

e quindi possiamo esprimere la potenza elettrica media in *a.c.* nel seguente modo:

$$P_m = V_{eff} \cdot I_{eff}$$

Si osservi la comodità di esprimere la potenza elettrica media in funzione dei valori efficaci. In effetti, anche per tale comodità, il valore efficace è molto spesso utilizzato in ambiente elettrotecnico, in luogo del valore massimo, per rappresentare l'ampiezza di un segnale alternato. Per la tensione di rete, ad esempio, il valore di 220V esprime proprio il valore efficace della *f.e.m.* erogata, mentre il valore massimo è intorno ai 315V.

Notiamo, infine, che il valore efficace è stato determinato, in sostanza, facendo la media dei quadrati dei valori della tensione.

Questa circostanza ci fornisce il modo per estendere il concetto di valore efficace anche a grandezze che non sono alternate sinusoidali, quali le onde quadre, le onde triangolari, le onde pulsanti etc. Per una grandezza di forma qualsiasi, ovvero *in generale*, il valore efficace è dato dalla media dei quadrati dei valori che tale grandezza assume nel tempo.

---

<sup>3</sup>In questa espressione abbiamo considerato solo la determinazione positiva della radice e quindi il valore efficace è sempre un valore positivo. Non importa infatti la polarità con cui il carico viene collegato al generatore.

### 2.1.6 Il valore simbolico

Sia:  $v = V_M \sin(\omega t + \varphi)$  una grandezza alternata sinusoidale di tensione.

A parità di frequenza, la forma della grandezza alternata sinusoidale dipende da due parametri (due *gradi di libertà*): l'*ampiezza* e la *fase iniziale*. Nella sua rappresentazione vettoriale notiamo che, al variare di entrambi i parametri, il punto  $P$  può sia ruotare, che allontanarsi dall'origine, venendo ad assumere una qualunque posizione nel piano.

Sappiamo, però, che i punti del piano possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i *numeri complessi*. Quindi, per rappresentare matematicamente una grandezza alternata, possiamo ricorrere ai numeri complessi.

A tal fine, ad ogni grandezza alternata di prefissata frequenza viene associato un numero complesso denominato: *valore simbolico* della grandezza alternata. Esso viene indicato ripetendo il nome della grandezza in neretto ( $\mathbf{V}$ ), o con sovrapposto un trattino ( $\bar{V}$ ).

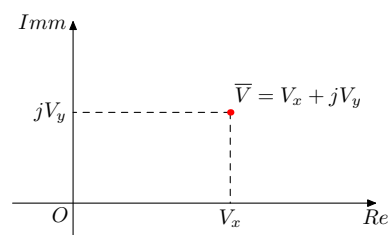
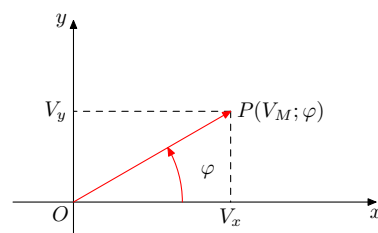
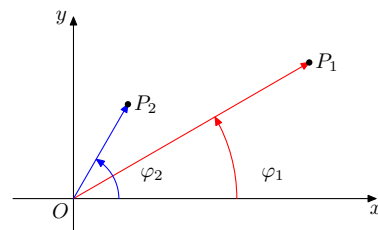
Per determinare il valore simbolico si parte dai valori di ampiezza e di fase del segnale dato, i quali costituiscono le *coordinate polari* del punto del piano al quale associare il numero complesso.

Dalle coordinate polari, poi, si determinano le corrispondenti *coordinate cartesiane*:

$$\begin{aligned} V_x &= V_M \cos \varphi \\ V_y &= V_M \sin \varphi \end{aligned}$$

Si introduce ora il piano di Gauss dei complessi disponendo nelle ascisse i numeri *reali* e nelle ordinate i numeri *immaginari*. Si ha:

$$\bar{V} = V_x + jV_y$$



### 2.1.7 Esercizi

- **Esercizio 1**

Data una grandezza alternata sinusoidale caratterizzata dai seguenti parametri: *ampiezza* di  $18V$ , *frequenza* di  $8kHz$ , *sfasamento* iniziale di  $30^\circ$ , si chiede di disegnare il segnale e di dedurre la sua espressione analitica e simbolica.

- **Esercizio 2**

Data una grandezza alternata sinusoidale, avente *frequenza* di  $15kHz$  e caratterizzata dalla espressione simbolica:  $V = 4 - j5V$ , si richiede, partendo dalla sua rappresentazione sul piano di Gauss, di ricavarne i parametri, l'espressione analitica e il grafico.

- **Esercizio 3**

Una grandezza alternata sinusoidale è caratterizzata dalla seguente espressione analitica:

$$V(t) = 4,5V * \text{sen}(2 * 400 * t + \frac{\pi}{6})$$

Si richiedono le rappresentazioni grafica e simbolica.

- **Esercizio 4**

Definire, in riferimento ad una grandezza alternata, il valore efficace e determinare il suo legame con il valore massimo.

- **Esercizio 5**

Con riferimento ad un segnale alternato con frequenza di  $500Hz$  ed ampiezza di  $12V_{pp}$ , applicato ad un carico resistivo di  $100\Omega$ , si chiede di determinare analiticamente, oppure graficamente, l'espressione della potenza dissipata dal carico ed il suo valore.

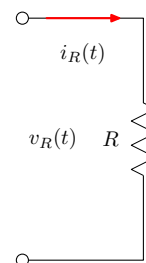


## 2.2 Componenti elettrici in a.c.

### 2.2.1 Il resistore in a.c.

Abbiamo già visto che il comportamento elettrico di una resistenza  $R$  è descritto, in *a.c.* come in *DC*, dalla *legge di Ohm*: la *d.d.p.* presente ai capi del componente deve essere, istante per istante, in proporzione con l'intensità di corrente che lo attraversa:

$$v_R(t) = R \cdot i_R(t)$$



Supponendo, in regime alternato sinusoidale, la tensione di tipo seno (per semplicità si era posto  $\varphi = 0$ ):

$$v_R = V_M \cdot \sin(\omega t)$$

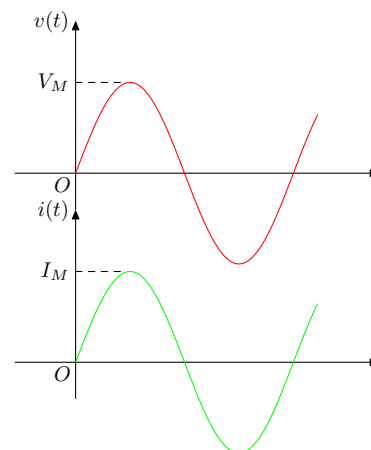
avevamo ottenuto:

$$i_R = I_M \cdot \sin(\omega t)$$

con:

$$I_M = \frac{V_M}{R}$$

La corrente segue, istante per istante, lo stesso andamento della *d.d.p.*, con la medesima frequenza, è *in fase* con essa ed ha *ampiezza in proporzione* con l'ampiezza della tensione.



Consideriamo, allora, in regime alternato sinusoidale, un generico componente bipolare passivo. Esso sarà equivalente ad una resistenza, se l'elemento assorbe corrente con lo stesso andamento della tensione. A tal fine sono necessarie, in *a.c.* due condizioni:

- l'ampiezza della corrente deve essere in proporzione con l'ampiezza della *d.d.p.*
- lo sfasamento tra tensione e corrente deve essere nullo.

Può capitare, infatti, che l'elemento bipolare assorba corrente con ampiezza in proporzione con quella della tensione, ma che la corrente assorbita non sia affatto in fase con la tensione applicata. In questo caso l'elemento non può essere considerato una resistenza, ma viene denominato con il termine generico di *impedenza*.

Riassumendo, affinché un dato elemento sia una resistenza devono sussistere le seguenti due condizioni (con  $\varphi$  si indica ora lo sfasamento tra tensione e corrente):

$$\begin{aligned} V_M &= R \cdot I_M \\ \varphi &= 0 \end{aligned}$$

Serve quindi sia l'informazione relativa all'ampiezza, che quella relativa allo sfasamento (è invece sottinteso che le frequenze sono le stesse). Queste due relazioni possono essere compattate in una sola relazione utilizzando i numeri complessi, ovvero la notazione simbolica. A tal fine utilizziamo come coordinate polari i rispettivi valori di ampiezza e fase dalle quali ci ricaviamo le corrispondenti coordinate cartesiane:

per la tensione:

$$\text{ampiezza} = V_M \quad \text{fase iniziale} = 0$$

$$\Rightarrow V_x = V_M \quad V_y = 0$$

per la corrente:

$$\text{ampiezza} = I_M \quad \text{fase iniziale} = 0$$

$$\Rightarrow I_x = I_M \quad I_y = 0$$

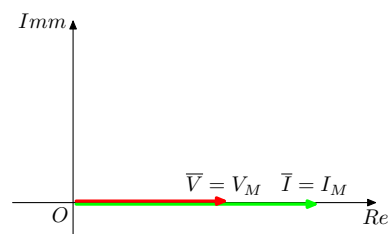
Avremo allora:

$$\bar{V} = V_M \quad \bar{I} = I_M$$

Facendo il rapporto, otteniamo la *relazione simbolica* tra tensione e corrente in *a.c.* per una resistenza. Essa è:

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = R$$

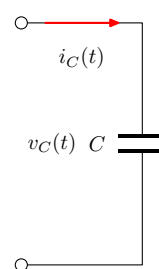
Questa relazione ha il vantaggio di contenere in un'unica espressione sia l'informazione relativa alla proporzionalità tra le ampiezze di tensione e corrente, sia quella relativa al loro sfasamento nullo.



### 2.2.2 Il condensatore in a.c.

Come noto il condensatore è costituito da due piastre metalliche, le *armature*, separate elettricamente da un materiale isolante. Quando il condensatore è sottoposto al processo di carica, ai suoi capi si sviluppa una *d.d.p.*, la quale è direttamente proporzionale alla carica,  $Q$ , depositata sulle armature. Quindi la legge di funzionamento è:

$$\frac{Q}{V_C} = C = \text{cost.}$$



Questa legge vale, istante per istante, anche in *a.c.*, ma ha lo svantaggio di legare tra loro carica e tensione, anziché corrente e tensione. Ricordando, però, che la corrente è legata alla carica elettrica attraverso la derivata, esplicitiamo la relazione rispetto alla carica, che ora è funzione del tempo, ed eseguiamo la derivata. Ricordando che  $C$  è costante si porta fuori, si ottiene:

$$\begin{aligned} Q(t) &= C \cdot v(t) \\ i(t) &= \frac{dQ(t)}{dt} = C \cdot \frac{dv(t)}{dt} \end{aligned}$$

In regime alternato sinusoidale, quindi, *l'intensità di corrente è direttamente proporzionale alla derivata della d.d.p. fatta rispetto al tempo.*

Supponiamo, in *a.c.*, la tensione di tipo seno (per semplicità si pone  $\varphi = 0$ ):

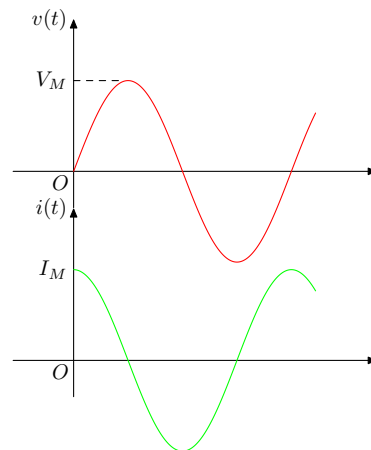
$$v_C = V_M \cdot \sin(\omega t)$$

Eseguiamo la derivata<sup>4</sup> e otteniamo:

$$i_C = V_M \cdot \cos(\omega t) \cdot \omega = I_M \cdot \cos(\omega t)$$

con:

$$I_M = V_M \cdot C \cdot \omega$$



Anche la corrente è un segnale alternato, con la stessa frequenza della tensione, ma di tipo cosinusoidale, ovvero è *sfasata* rispetto alla tensione di  $90^\circ$  in anticipo. La corrente ha, inoltre, *ampiezza in proporzione* con l'ampiezza della tensione. Denominiamo *reattanza capacitiva* il rapporto (costante) tra le ampiezze di ten-

sione e corrente. Si pone infatti:

$$X_C = \frac{V_M}{I_M} = \frac{V_M}{V_M \cdot C \cdot \omega} = \frac{1}{\omega C}$$

In regime alternato sinusoidale, un elemento bipolare passivo potrà essere assimilato ad una reattanza capacitiva, se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

- l'ampiezza della corrente è in proporzione con l'ampiezza della *d.d.p.*
- lo sfasamento della corrente rispetto alla tensione è di  $90^\circ$  in anticipo.

La reattanza può essere considerata come un caso particolare di *impedenza*. Riassumendo, affinché un dato elemento sia una reattanza capacitiva devono sussistere le seguenti due condizioni (con  $\varphi$  si indica ora lo sfasamento della corrente rispetto alla tensione):

$$\begin{aligned} V_M &= X_C \cdot I_M \\ \varphi &= 90 \end{aligned}$$

Servono ancora le informazioni relative all'ampiezza ed allo sfasamento (mentre è sempre sottinteso che le frequenze sono le stesse).

Anche per il condensatore queste due relazioni possono essere compattate utilizzando i numeri complessi, ovvero la notazione simbolica. Per esprimere simbolicamente tensione e corrente, utilizziamo come coordinate polari i rispettivi valori di ampiezza e fase dalle quali ci ricaviamo le corrispondenti coordinate cartesiane: per la tensione:

$$\text{ampiezza} = V_M \quad \text{fase iniziale} = 0$$

$$\Rightarrow V_x = V_M \quad V_y = 0$$

per la corrente:

$$\text{ampiezza} = I_M \quad \text{fase iniziale} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow I_x = 0 \quad I_y = I_M$$

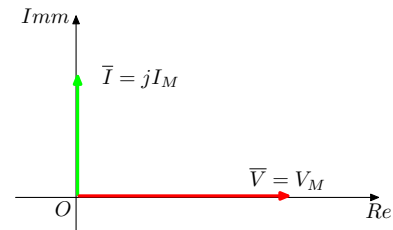
Avremo allora:

$$\bar{V} = V_M \quad \bar{I} = jI_M$$

Facendo il rapporto, otteniamo la *relazione simbolica* tra tensione e corrente in *a.c.* per una resistenza. Essa è:

$$\bar{X}_C = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V_M}{jI_M} = -jX_C$$

Anche questa relazione contiene in un'unica espressione sia l'informazione relativa alla proporzionalità tra le ampiezze di tensione e corrente, sia quella relativa al loro sfasamento.



### 2.2.3 L'induttore

I componenti ed i circuito trattati finora sono basati interamente sui fenomeni di tipo elettrico. E' stato però dimostrato che esistono importanti legami tra *elettricità* e *magnetismo*, che sono poi alla base di un nutrito insieme di applicazioni molto importanti, tra le quali vi sono: l'*induttore*, il trasformatore, l'alternatore, il motore elettrico, etc. I loro effetti si fanno, però, sentire anche nei componenti elettrici usuali ed anche nei cavi di collegamento, quando viene loro richiesto di operare a frequenze elevate, come accade normalmente nel campo delle comunicazioni.

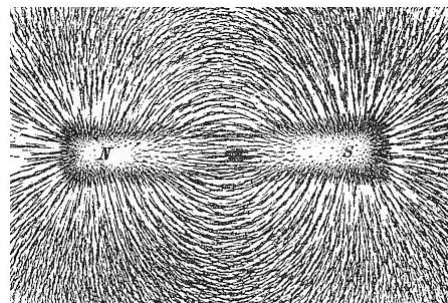
E' giunto, quindi, il momento di esaminare i principali effetti di interazione tra elettricità e magnetismo.

Premettiamo che consideriamo il magnetismo un fenomeno fisico ampiamente noto, in relazione al quale richiamiamo solo alcune caratteristiche peculiari, che lo distinguono dall'elettricità.

Anche nel magnetismo esistono due forme in natura, riconducibili alle due polarità, o poli magnetici, indicati con i termini di *polo NORD* e *polo SUD*: poli di segno contrario si attraggono e poli dello stesso segno si respingono. Non è possibile, però, separare fisicamente i due poli.

Esiste un *magnetismo naturale* legato alla esistenza di alcune sostanze contenenti al loro interno ferro, nichel o cobalto, ovvero le cosiddette *sostanze ferromagnetiche*, quali la *magnetite*, che lo presentano naturalmente (Il magnetismo può anche essere indotto in altre sostanze ferromagnetiche non inizialmente magnetizzate).

Esaminando una *calamita*, oggetto che presenta magnetismo, si osserva che essa genera nello spazio circostante un *campo magnetico* le cui linee di forza hanno la tipica forma di figura: escono dal polo Nord e si richiudono al polo Sud. Intendiamo con il termine *campo magnetico* una zona dello spazio in cui si esplicano forze di natura magnetica, ad esempio su un ago magnetizzato.



*immagine presa da wikipedia*

Esse possono essere rese rese visibile disponendo della limatura di ferro in un foglio di carta disposto sopra la calamita. I frammenti di ferro della limatura si comportano come aghi magnetizzati e tendono ad orientarsi secondo le linee di forza del campo magnetico, rilevandone quindi la presenza e la forma.

## Campi magnetici generati da correnti elettriche

Il primo fenomeno interessante di interazione tra elettricità e magnetismo è stato scoperto nel 1820 da un ricercatore danese: *Hans Cristian Oersted*.

Oersted scoprì che facendo scorrere corrente elettrica in un filo conduttore rettilineo e disponendo poi un ago magnetizzato in prossimità del filo, quest'ultimo subisce una *deviazione*.

Fu così dimostrato che:

**Fenomeno 1.** *Una corrente elettrica in un filo genera nello spazio circostante un campo magnetico.*

bassorilievo del 1870



Le linee di forza del campo sono concentriche con il filo e la loro intensità decresce man mano che ci si allontana da esso.

Questo importante fenomeno ha dato avvio ad una serie di esperimenti tendenti da un lato a comprendere meglio l'interazione tra elettricità e magnetismo e dall'altro a cercare, ai fini applicativi, di *intensificare* il più possibile il campo magnetico prodotto.

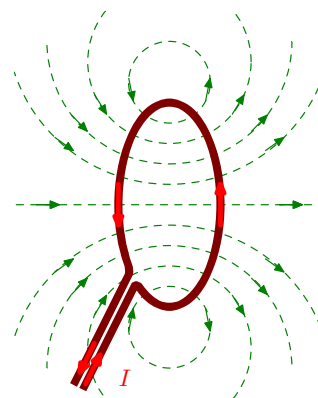
Il campo è stato intensificato in tre passi successivi:

**1° passo:** *la spira*

Si è notato che il campo è più intenso se, anziché un filo rettilineo, si considera un filo sagomato a spirale e per questo denominato *spira*.

Confrontando i punti appartenenti alle linee di forza si nota che, nello spazio interno alla spira, essi sono più vicini nel filo sagomato a spirale, che nel filo rettilineo, indicando un addensamento delle linee di forza del campo e quindi una intensificazione dello stesso, anche se, naturalmente, nello spazio esterno alla spira avviene esattamente il contrario.

Il campo magnetico prodotto è *massimo* nel centro della spira ed ha direzione perpendicolare alla stessa. Se la corrente elettrica percorre il filo in senso antiorario, allora il verso del campo è quello uscente, come in figura <sup>5</sup>.



<sup>5</sup>Per determinare il verso del campo di solito si utilizza la regola della mano destra.

**2° passo:**  $N$  spire

Per intensificare ulteriormente il campo si scoprì che era conveniente avvolgere il filo più volte attorno ad un apposito supporto, in modo da ottenere *più spire* concentriche molto vicine tra loro. Per evitare cortocircuiti il filo viene ricoperto da uno smalto isolante.

L'elemento ottenuto, la *bobina*, a parità di corrente elettrica, presenta un campo magnetico  $N$  volte più intenso del campo prodotto da una singola spira.

**3° passo:** *nucleo ferromagnetico*

Cambiando il materiale con cui realizzare il supporto della bobina si è scoperto che: *le sostanze ferromagnetiche producono intensità di campo molto maggiori delle altre sostanze*. Il supporto, realizzato con tali sostanze, è denominato: *nucleo della bobina*.

Il valore del campo viene moltiplicato per un fattore, denominato *permeabilità magnetica*,  $\mu$ , e dipendente dal materiale utilizzato nel nucleo. La maggior parte dei materiali presenta circa lo stesso valore di permeabilità del vuoto<sup>6</sup>. Le *sostanze ferromagnetiche*, invece, presentano permeabilità molto maggiore di quella del vuoto, di un fattore 100 o più.



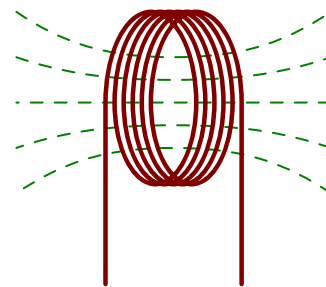
da wikipedia

**Le grandezze magnetiche**

Il campo prodotto da una bobina attraversata da corrente ha una forma perfettamente sovrapponibile a quella prodotta da una calamita avente le dimensioni della bobina.

Osservando le linee di forza del campo magnetico si nota che esse sono linee chiuse, come se il campo magnetico, similmente ad un fluido, fluisse indefinitamente lungo di esse.

Internamente alla bobina il campo è sostanzialmente *uniforme*, cioè ha in ogni punto la medesima intensità e direzione.



<sup>6</sup>La permeabilità magnetica indica l'attitudine di una sostanza a lasciarsi magnetizzare. La permeabilità magnetica del vuoto è una delle costanti fisiche fondamentali e vale:  $\mu_0 = 1,256 \mu H/m$ . Le sostanze non ferromagnetiche si dividono in due classi: diamagnetiche ( $\mu < \mu_0$ ) e paramagnetiche ( $\mu > \mu_0$ ). La permeabilità magnetica relativa di una sostanza è espressa dal rapporto:  $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$

L'intensità del campo prodotta localmente in un punto, di dimensioni infinitesime, si chiama *campo di induzione magnetica*,  $\vec{B}$ . Esso è un vettore avente per direzione la direzione delle linee di forza nel punto considerato ed ampiezza *direttamente proporzionale* alla corrente,  $I$ , che lo genera, al numero di spire,  $N$  della bobina ed alla permeabilità magnetica del materiale utilizzato come nucleo. Inoltre è più intenso se le spire sono avvolte molto strettamente e quindi l'ampiezza è *inversamente proporzionale* alla lunghezza,  $l$ , della bobina. Tutto ciò porta alla seguente relazione:

$$B = \mu \frac{N}{l} \cdot I$$

L'unità di misura di  $B$  nel  $SI$  si chiama *tesla*.

Indicata con  $S$  una sezione della bobina, il *flusso magnetico* complessivo,  $\Phi$ , prodotto dalla bobina, corrisponde al campo uscente da  $S$  e si calcola sommando le intensità di campo di ciascun punto di essa. Dato che il campo è uniforme, allora basta moltiplicare l'intensità di campo nel punto centrale per la sezione:

$$\Phi = B \cdot S$$

L'unità di misura del flusso nel  $SI$  si chiama *Weber*.

### Correnti elettriche generate da campi magnetici - l'induzione elettromagnetica

Il secondo fenomeno fondamentale di interazione tra elettricità e magnetismo è stato scoperto nel 1831 da un ricercatore inglese: *Michael Faraday* ed è noto come *induzione elettromagnetica*. Faraday dimostrò che:

**Fenomeno 2.** *Un campo magnetico variabile nel tempo, determina il passaggio di corrente in un circuito elettrico concatenato con le linee di forza del campo.*

Se con l'esperienza di Oersted era l'elettricità a produrre il magnetismo, con l'esperienza di Faraday avviene l'esatto contrario ed è dimostrato che anche il magnetismo è in grado di produrre correnti elettriche.

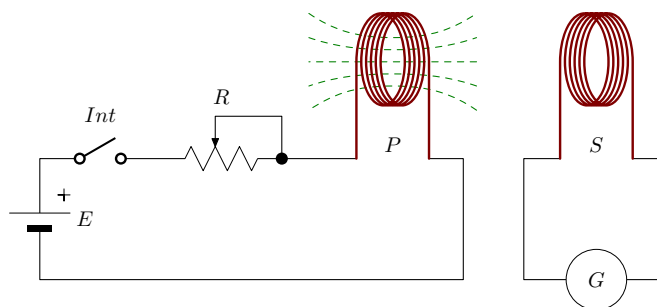
Faraday <sup>7</sup> mostrò, però, che l'effetto è solo dinamico e non statico, avviene cioè con *campi variabili* nel tempo, evidente in *a.c.*, ma non in *DC*.

---

<sup>7</sup>Nel primo, originario esperimento Faraday utilizzò un toroide di ferro sul quale erano ricavati due avvolgimenti. Il primario era collegato ad una pila, tramite un interruttore di accensione. Il secondario era chiuso in corto circuito. Per rilevare l'eventuale passaggio di corrente, vicino al secondario c'era un ago magnetico. Con questo apparato Faraday fu in grado di osservare una deviazione dell'ago magnetico, che segnalava il passaggio di corrente nel secondario e ciò solo quando chiudeva od apriva l'interruttore.



L'esperienza di Faraday può essere ricondotta al circuito di figura. Per produrre il campo magnetico si utilizza la prima sezione circuitale, la quale alimenta il primo avvolgimento, il *primario*.



Chiudendo l'interruttore si produce, infatti, una corrente di intensità,  $I$ , la quale, scorrendo sul primario, determina la formazione di un *flusso magnetico*  $\Phi$ .

Gli effetti del campo magnetico su di un circuito elettrico si osservano con la seconda sezione del circuito, comprendente un altro avvolgimento, il *secondario*, posto nelle immediate vicinanze del primario, in modo da intercettare le linee di forza del flusso magnetico, e chiuso in corto circuito.

Si chiama *flusso magnetico concatenato*,  $\Phi_C$ , la quota del flusso magnetico di primario che viene intercettata dal secondario.

Per misurare l'eventuale corrente circolante nel secondario si utilizza un *Galvanometro*, corrispondente ad un microamperometro a zero centrale, il quale è sensibile a correnti molto piccole ed è in grado di rilevare la loro intensità ed il loro verso. Attivando il circuito non si nota, a regime, alcun passaggio di corrente e questo dimostra che in condizioni statiche non si ha induzione.

Variando velocemente il reostato, invece, oppure aprendo e chiudendo l'interruttore, od anche modificando velocemente la posizione del secondario, il Galvanometro rivela per un breve intervallo passaggio di corrente e ciò prova che l'effetto è dinamico. Sostituendo all'alimentazione continua, l'alimentazione alternata, il passaggio di corrente è persistente.

In generale *ogni azione* che determina un cambiamento nel tempo del flusso magnetico che si concatena con il secondario, produce una corrente elettrica.

### La forza elettromotrice indotta

Abbiamo detto che il circuito di secondario è costituito da alcune spire chiuse in cortocircuito. Ci chiediamo allora come sia possibile che circoli corrente. Infatti è noto che, affinché in un circuito elettrico circoli corrente, è necessario che in esso vi sia almeno un elemento attivo. Spieghiamo questo apparente paradosso ipotizzando che l'induzione elettromagnetica introduca nel secondario una *forza elettromotrice* la cui origine va ricercata nelle variazioni del flusso magnetico concatenato.

Ricordando che in un bipolo attivo, la *f.e.m.* è definita come la *d.d.p.* presente

ai capi del bipolo a vuoto, per verificare il nostro assunto, bisogna staccare il galvanometro e misurare con un voltmetro, a morsetti aperti, la *d.d.p.* ai capi della spira.

L'esperienza dimostra che, quando si verifica un cambiamento del flusso concatenato con la nostra spira, allora ai capi della stessa è effettivamente presente una *d.d.p.* e ciò conferma l'esistenza della *f.e.m.* indotta.

Inoltre il valore della *f.e.m.* indotta è tanto maggiore, quanto più ampia è la variazione di flusso, e quanto minore è l'intervallo temporale in cui avviene.

La legge di induzione elettromagnetica, legge di Faraday, è, infatti, così formulata:

**Legge 1.** *Un flusso magnetico variabile che si concatena con un circuito elettrico vi determina una f.e.m. indotta, la cui intensità è direttamente proporzionale alla variazione di flusso ed inversamente proporzionale all'intervallo temporale in cui la variazione di flusso si verifica.*

Relativamente al verso di azione della *f.e.m.* è stato osservato che la corrente che circola nel secondario crea essa stessa un secondo flusso, di secondario e questo flusso ha sempre direzione tale da opporsi alle variazioni di flusso del primario. Questo fatto è espresso dalla cosiddetta *legge di Lenz*:

**Legge 2.** *Il verso della f.e.m. indotta è tale da opporsi sempre alla causa che l'ha generata.*

Indicato con  $\Delta\Phi$  la variazione di flusso, con  $\Delta t$  l'intervallo temporale e con  $e_i$  la *f.e.m.* indotta, la legge di induzione elettromagnetica, legge di Faraday - Lenz, si scrive:

$$e_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Questa relazione ha consentito di derivare le unità di misura delle grandezze magnetiche dalle unità di misura elettriche, evitando di introdurre una nuova unità di misura fondamentale nel Sistema Internazionale. Infatti, invertendo la relazione, si può esprimere l'unità di misura del flusso, il *Weber*,  $Wb$ , come prodotto delle unità di misura della tensione e del tempo:

$$1[Wb] = 1[V] \cdot [s]$$

Di conseguenza l'unità di misura del campo di induzione magnetica, il *Tesla*, è:

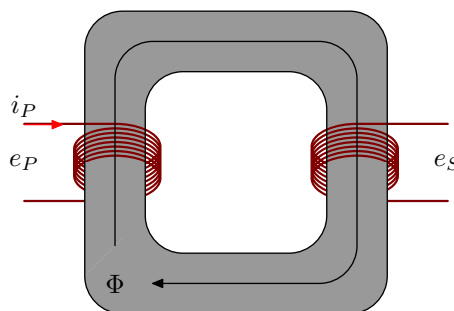
$$1[T] = 1[Wb] \cdot [m^{-2}]$$

. Dal punto di vista matematico nell'espressione della *f.e.m.* indotta è riconoscibile un rapporto incrementale: *variazione di flusso su variazione di tempo*, per cui, facendo il limite per intervalli temporali tendenti a zero, esso diventa la *derivata del flusso* fatta rispetto al tempo:

$$e_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

## Il trasformatore

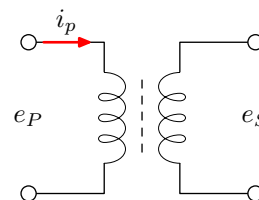
Consideriamo una bobina e la alimentiamo in *a.c.* in modo che la stessa sia attraversata da corrente. Si genera di conseguenza un flusso variabile,  $\Phi$ . Possiamo trasportare il flusso così generato verso un qualunque punto sagomando il nucleo della bobina, detto anche *traferro*, in forma toroidale, in modo che esso stesso raggiunga tale punto.



Infatti avendo il nucleo una costante di *permeabilità magnetica* molto più grande dell'aria, la gran parte del flusso seguirà il percorso tracciato dal traferro e quindi, mantenendosi internamente ad esso, raggiungerà il punto voluto. In questo punto avvolgiamo una seconda bobina<sup>8</sup>. La struttura così ottenuta, rappresentata in figura, si chiama: *trasformatore*<sup>9</sup>.

Esso si rappresenta schematicamente con il simbolo elettrico di figura.

Chiamiamo *primario* la prima bobina e *secondario* la seconda. Supponiamo anche che la prima bobina abbia  $N_p$  spire e che la seconda ne abbia  $N_s$ .



Indichiamo, poi, con  $i_p$  la corrente che attraversa il primario, generando il flusso variabile. Supponiamo infine, per semplicità, che tutto il flusso così generato fluisca entro il traferro, ovvero che non vi sia flusso disperso.

In questa ipotesi tutto il flusso  $\Phi$  deve attraversare il secondario concatenandosi con ciascuna spira di esso. Ne risulta che il flusso complessivo concatenato con il secondario è:

$$\Phi_{cs} = N_s \cdot \Phi$$

Essendo variabile esso genera nel secondario una tensione indotta, il cui verso dipende dal verso (destrogiro o levogiro) in cui primario e secondario sono avvolti sul nucleo. Di solito per consentire l'individuazione della polarità della tensione indotta, nel simbolo elettrico del trasformatore viene aggiunto un puntino sui lati in cui le polarità di primario e secondario sono concordi.

Il valore assoluto della tensione indotta, invece, lo si ricava dalla legge dell'indu-

<sup>8</sup>Possiamo ovviamente avvolgere anche più di un secondario.

<sup>9</sup>Vi sono molte varianti nella simbologia del trasformatore, ad esempio a seconda del traferro utilizzato.

zione elettromagnetica di Faraday:

$$e_s = \frac{\Delta \Phi_{cs}}{\Delta t}$$

Trattiamo l'espressione come una derivata, per cui, essendo  $N_s$  una costante, la portiamo fuori:

$$e_s = N_s \cdot \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

Osserviamo che la tensione indotta è in proporzione con la variazione di flusso e cresce all'aumentare del numero delle spire.

Ritorniamo ora sul flusso variabile ed osserviamo che, dopo aver attraversato il secondario esso è costretto a ritornare verso la bobina di primario e ad *autoconcatenarsi* anche con essa. L'esperienza dimostra che il fenomeno della induzione elettromagnetica si applica anche al primario, ai capi del quale agisce una *f.e.m.* detta *autoindotta* il cui valore dipende dalle variazioni del flusso che si *autoconcatena* con esso, dato da:

$$\Phi_{cp} = N_p \cdot \Phi$$

Il valore assoluto della *f.e.m. autoindotta* sul primario è allora:

$$e_p = \frac{\Delta \Phi_{cp}}{\Delta t}$$

Trattiamo anche questa espressione come una derivata, per cui, essendo  $N_p$  una costante, otteniamo:

$$e_p = N_p \cdot \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

Osserviamo che ora la tensione autoindotta sul primario dipende dal numero di spire del primario.

Confrontando questa espressione con quella precedentemente ricavata per il secondario notiamo una forte analogia e che in entrambe compare a fattore la variazione di flusso. Facendo il rapporto tra le due espressioni esso si semplifica e si ricava:

$$\frac{e_s}{e_p} = \frac{N_s}{N_p}$$

*Il rapporto tra le f.e.m. indotte in entrata ed in uscita del trasformatore è dato semplicemente dal rapporto spire primario - secondario.*

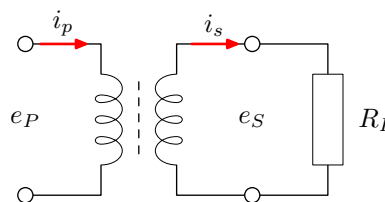
Sul lato dove l'avvolgimento ha un numero maggiore di spire anche la *f.e.m.*, quindi è più elevata.

Pertanto in *a.c.* possiamo abbassare, od alzare il livello di una tensione utilizzando un trasformatore e giocando sul rapporto spire. Ad esempio, con 100 spire in primario e 10 *mila* spire in secondario, possiamo portare una tensione di 10V al

valore di 1000V!

Collegiamo ora il secondario del trasformatore ad un carico passivo. Esso richiederà la corrente  $i_s$  e di conseguenza il trasformatore renderà disponibile al secondario la potenza :

$$P_s = e_s \cdot i_s$$



Ricordando che la potenza rappresenta l'energia messa a disposizione nell'unità di tempo, per il principio di conservazione dell'energia deve essere:

$$P_s \leq P_p$$

Un po' di energia viene persa: per le perdite legate al flusso disperso, per le correnti parassite indotte sul traferro, che lo riscaldano, per le perdite ohmiche sui conduttori, per la formazione di un controflusso generato dalla corrente di secondario.

Definiamo: *rendimento* del trasformatore,  $\eta_T$ , la potenza disponibile in secondario rapportata alla potenza fornita in primario:

$$\eta_T = \frac{P_s}{P_p}$$

Un buon trasformatore può presentare rendimenti elevati, del 90% ed oltre, ma la perdita di potenza comporta comunque un riscaldamento dello stesso e può comportare la necessità di un suo raffreddamento.

Per un trasformatore ideale il rendimento è unitario, e la potenza disponibile in secondario corrisponde alla potenza fornita in primario. In questo caso abbiamo:

$$P_s = P_p \implies e_s \cdot i_s = e_p \cdot i_p$$

ma allora, ricavando il rapporto tra le correnti di secondario e di primario, si trova che esso è il reciproco del corrispondente rapporto tra le rispettive *f.e.m.*:

$$\frac{i_s}{i_p} = \frac{e_p}{e_s} = \frac{N_p}{N_s}$$

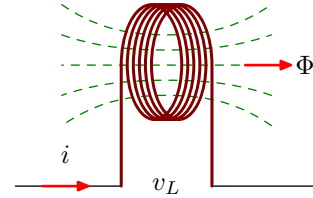
Pertanto sul lato dove l'avvolgimento ha più spire, la tensione è maggiore, mentre la corrente risulta minore e viceversa. Questa proprietà è sfruttata per dimensionare i fili, più sottili dove l'avvolgimento ha più spire e minore corrente, più spessi dove ci sono meno spire e la corrente è maggiore.

### L'induttanza

Consideriamo la bobina di figura con  $N$  spire e facciamo circolare in essa la corrente alternata  $i$ .

Come sappiamo si origina da essa il flusso magnetico  $\Phi$ , il quale, dopo aver circolato per il materiale utilizzato come traferro (in questo caso l'aria), ritorna verso la bobina, autoconcatenandosi con ciascuna spira di essa.

L'espressione del flusso concatenato è:



$$\Phi_c = N \cdot \Phi = N \cdot S \cdot B = \frac{\mu \cdot N^2 \cdot S}{l} \cdot i$$

Come risulta da questa espressione, **il flusso concatenato è direttamente proporzionale alla corrente**:

$$\frac{\Phi_c}{i} = L = \text{costante}$$

La costante di proporzionalità,  $L$  tra il flusso concatenato e la corrente viene denominata *coefficiente di autoinduttanza* o anche più semplicemente *induttanza* ed ha la seguente espressione:

$$L = \frac{\mu \cdot N^2 \cdot S}{l}$$

D'altronde, per la legge di induzione elettromagnetica, ai capi della bobina viene autoindotta una forza elettromotrice il cui valore, che indichiamo con  $V_L$ , è dato da (*usiamo la derivata*):

$$V_L = \frac{d\Phi_c}{dt}$$

Eseguendo la derivata e sapendo che  $L$  è una costante e si può portare fuori:

$$V_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Questa relazione esprime *la legge di funzionamento della bobina in a.c.*: in regime alternato sinusoidale, *la tensione indotta ai capi di una bobina è direttamente proporzionale alla derivata della corrente che l'attraversa, fatta rispetto al tempo*.

Essa ci permette anche di definire l'unità di misura dell'induttanza, la quale è indicata con  $[H]$  e si chiama *Hentry*.

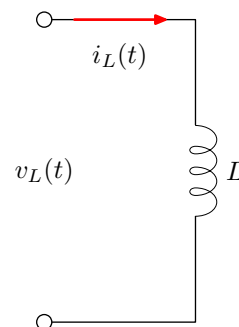
Infatti, esplicitando rispetto ad  $L$ , si ricava l'equazione dimensionale seguente:

$$[L] = \frac{[V]}{[i]} \cdot [t] = [R] \cdot [t] \implies 1[H] = 1[\Omega] \cdot 1[s]$$

### La bobina in a.c.

Riprendiamo l'esempio precedente e consideriamo una bobina con induttanza di valore  $L$ . Per rappresentare la bobina usiamo il simbolo elettrico di figura. Abbiamo visto che la sua legge di funzionamento è:

$$V_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$



Supponiamo allora, in regime alternato sinusoidale, che la corrente sia di tipo seno: (per semplicità si pone  $\varphi = 0$ )

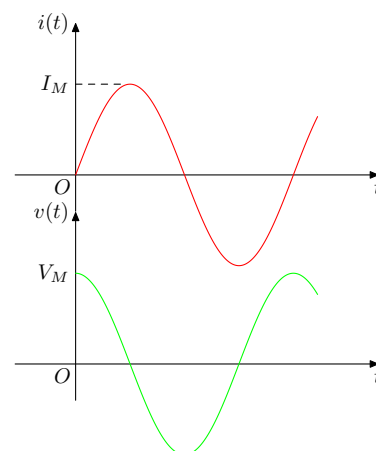
$$i_L = I_M \cdot \sin(\omega t)$$

Eseguiamo la derivata, ricordando che  $I_M$  ed  $\omega$  sono costanti e che la derivata del seno dà il coseno. Otteniamo:

$$v_L = I_M \cdot L \cdot \cos(\omega t) \cdot \omega = V_M \cdot \cos(\omega t)$$

con:

$$V_M = I_M \cdot L \cdot \omega$$



Anche la tensione è un segnale alternato, con la stessa frequenza della corrente, ma di tipo cosinusoidale, ovvero è *sfasata* rispetto alla corrente di  $90^\circ$  in anticipo. La tensione ha, inoltre, *ampiezza in proporzione* con l'ampiezza della corrente. La situazione è molto simile a quella già esaminata per il condensatore. Infatti anche il comportamento della bobina è assimilabile ad una *reattanza*, denominata ora *reattanza induttiva*. Il valore della reattanza si ottiene ancora facendo il rapporto (costante) tra le ampiezze di tensione e corrente. Si pone infatti:

$$X_L = \frac{V_M}{I_M} = \frac{I_M \cdot L \cdot \omega}{I_M} = \omega L$$

Riassumendo, affinché un elemento dato sia assimilabile ad una bobina devono sussistere le seguenti due condizioni (con  $\varphi$  si indica ora lo sfasamento della tensione rispetto alla corrente):

$$\begin{aligned} V_M &= X_L \cdot I_M \\ \varphi &= 90 \end{aligned}$$

Compattiamo, anche per la bobina, queste due relazioni in un'unica relazione, utilizzando i numeri complessi, ovvero la notazione simbolica. Per esprimere simbolicamente tensione e corrente, utilizziamo come coordinate polari i rispettivi valori di ampiezza e fase dalle quali ci ricaviamo le corrispondenti coordinate cartesiane:

per la corrente:

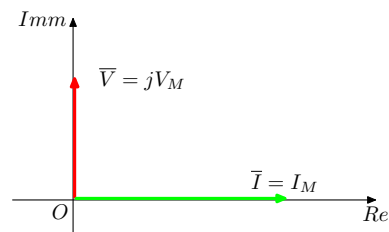
$$\text{ampiezza} = I_M \quad \text{fase iniziale} = 0$$

$$\Rightarrow I_x = I_M \quad I_y = 0$$

per la tensione:

$$\text{ampiezza} = V_M \quad \text{fase iniziale} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow V_x = 0 \quad V_y = V_M$$



Facendo il rapporto, otteniamo la *relazione simbolica* tra tensione e corrente in *a.c.* per una induttanza. Essa è:

$$\bar{X}_L = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{jV_M}{I_M} = jX_L$$

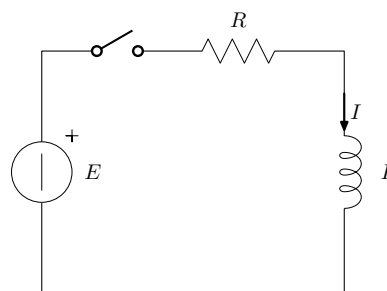
Anche questa relazione contiene in un'unica espressione sia l'informazione relativa alla proporzionalità tra le ampiezze di tensione e corrente, sia quella relativa al loro sfasamento.

### La bobina in corrente continua

Consideriamo il circuito di figura, nel quale la bobina è alimentata dal generatore in continua,  $E$ , tramite la resistenza  $R$ .

Se consideriamo la *continua* come una *alternata a frequenza zero*, allora, dalla espressione di  $X_L$ , la bobina dovrebbe presentare, in *D.C.*, reattanza nulla. Di conseguenza la corrente dovrebbe dipendere solo dalla resistenza e dovrebbe avere il valore:

$$I = \frac{E}{R}$$



Tutto ciò, però, avviene soltanto *a regime*, dopo che è trascorso un tempo sufficientemente lungo dalla chiusura dell'interruttore di accensione.



Infatti, negli istanti immediatamente seguenti alla chiusura dell'interruttore, la corrente varia, perché deve salire dal valore zero, al valore di regime e, per il fenomeno dell'induzione elettromagnetica, ai capi della bobina viene indotta una *d.d.p.*, la quale agisce da freno per la corrente, facendo sì che essa raggiunga il valore di regime non istantaneamente, ma dopo un tempo *transitorio* finito.

In generale, se in un circuito è inserita una bobina, si instaura un transitorio ogni volta che viene data tensine, o anche quando la tensione viene variata bruscamente, ad esempio perché una porta logica è commutata.

Se la crescita della corrente avvenisse in modo lineare, allora essa raggiungerebbe il valore di regime nel tempo:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

La quantità  $\tau$  è chiamata *costante di tempo* della bobina ed è *direttamente proporzionale* ad  $L$ . Infatti, tanto più  $L$  è grande tanto più cresce l'effetto frenante e quindi aumenta  $\tau$ . Se, invece, si cambia la resistenza, ad esempio di dimezza, ma si mantiene la stessa  $L$ , allora l'effetto frenante è lo stesso, ma la corrente di regime da raggiungere cambia, diventando nel nostro esempio doppia. Allora anche il tempo necessario per raggiungere il valore di regime cambia, raddoppiando. Quindi la costante di tempo risulta *inversamente proporzionale* ad  $R$ .

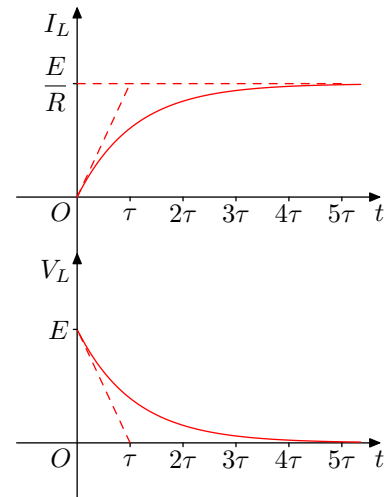
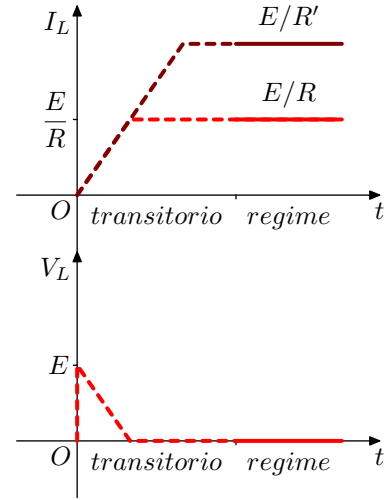
Nella realtà, però, la crescita della corrente non è affatto lineare, ma *esponenziale*, quindi il valore di regime viene raggiunto in un tempo pari a circa  $4 \div 5 \tau$ .

Ne risultano gli andamenti della corrente e della *d.d.p.* riportati nei grafici di figura. L'equazione per la corrente è:

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

mentre per la tensione abbiamo:

$$v_L(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Per dimostrare questi andamenti dovremmo analizzare il circuito, però non pos-

siamo fare ricorso al metodo simbolico, in quanto quest'ultimo dà solo la situazione già a regime, mentre non ci consente di vedere l'evoluzione dei segnali durante il transitorio <sup>10</sup>. Analizziamo allora il circuito nel *dominio* del tempo, scrivendo l'equazione della maglia nel seguente modo:

$$E = R \cdot i(t) + v_L(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Come si vede si è ottenuta una equazione nella quale compare la corrente, ma anche la sua derivata, la cui risoluzione necessita di conoscenze matematiche superiori. Si lascia, comunque, allo studente il compito di verificare che l'espressione della corrente su riportata è effettivamente soluzione di questa equazione.

---

<sup>10</sup>Anche per questo motivo nella analisi dei circuiti si utilizza in luogo del metodo simbolico la *trasformata di Laplace*, la quale consente invece di ricavare l'evoluzione dei segnali anche durante i transitori.

### 2.2.4 Questionario riepilogativo

1. Partendo dalla legge di funzionamento del condensatore, ricavare in *a.c.* l'espressione della corrente e il valore della reattanza.
2. Quali sono le caratteristiche che un bipolo passivo deve soddisfare per potersi definire una reattanza? E una impedenza?
3. Determinare, per un condensatore in *a.c.*, il legame simbolico tra la tensione e la corrente.
4. Per quale motivo si dice che il condensatore in *a.c.* ha comportamento reattivo? Giustificare o per via analitica o per via grafica.
5. Descrivere l'esperienza di Oersted.
6. Illustrare i passaggi che consentono di intensificare il campo magnetico prodotto da un filo percorso da corrente.
7. Descrivere l'esperienza di Faraday sull'induzione elettromagnetica.
8. Con riferimento ad un trasformatore, descrivere il suo funzionamento e dimostrare il legame tra ingresso ed uscita.
9. Introdurre il coefficiente di autoinduttanza di una bobina e desumere la sua espressione.
10. Desumere la legge di funzionamento di una bobina in *a.c.*
11. Partendo dalla legge di funzionamento della bobina, ricavare in *a.c.* l'espressione della tensione autoindotta e il valore della reattanza.
12. Determinare, per una bobina in *a.c.*, il legame simbolico tra la tensione e la corrente.
13. Mostrare la differenza tra la potenza attiva e la potenza reattiva.

### 2.2.5 Esercizi

- **Esercizio 1**

È data una resistenza di  $200\Omega$ , sottoposto in *a.c.* ad una tensione di  $8V$  di ampiezza e di  $10kHz$  di frequenza. Schematizzare e ricavare, applicando il metodo simbolico, la corrente.

- **Esercizio 2**

È dato un condensatore di  $47nF$ , sottoposto ad una eccitazione in *a.c.* di  $15V$  di ampiezza e di  $25kHz$  di frequenza. Schematizzare e ricavare, applicando il metodo simbolico, la reattanza e la corrente.

- **Esercizio 3**

È dato un induttore di  $33mH$ , sottoposto ad una eccitazione in *a.c.* di  $15mA$  di ampiezza e di  $10kHz$  di frequenza. Schematizzare e ricavare, applicando il metodo simbolico, la reattanza e la tensione.

- **Esercizio 4**

È dato un condensatore di  $2,2nF$ , il quale, in *a.c.*, è attraversato da una corrente di  $5mA$  di ampiezza, di  $4kHz$  di frequenza e con uno sfasamento iniziale di  $30^\circ$ . Schematizzare e ricavare, applicando il metodo simbolico, la reattanza e la tensione.

- **Esercizio 5**

È dato un induttore di  $33mH$ , il quale, in *a.c.*, è eccitato con una tensione di  $12V$  di ampiezza, di  $20kHz$  di frequenza e con uno sfasamento iniziale di  $60^\circ$ . Schematizzare e ricavare, applicando il metodo simbolico, la reattanza e la corrente.

## 2.3 Risoluzione delle reti in a.c. con il metodo simbolico

da fare

## 2.4 I filtri

### 2.4.1 Il concetto di filtro

Come sappiamo dall'esperienza comune, il *filtro* è un dispositivo che viene inserito nel percorso di un segnale<sup>11</sup> allo scopo di consentire il passaggio solo ad alcuni segnali, ma non a tutti. Esso svolge, quindi, una funzione di *selezione*.

Incontriamo situazioni simili molte volte nella vita reale e in differenti contesti.

Nell'*informatica* il filtro (*filtro software*<sup>12</sup>) è un programma che tiene sotto osservazione altri programmi, che cercano di andare in esecuzione su una macchina, segnalando e bloccando quelli considerati, secondo un certo criterio, pericolosi (filtri *anti spam*, *antivirus*, etc). Nel collegamento alla rete, questo filtro consente di impedire alla maggior parte dei messaggi provenienti dall'esterno di girare nella macchina, intasandola, se non addirittura danneggiandola.

Il *filtro hardware* opera a monte del filtro software ed ha il più agevole compito di controllare, a monte, il flusso dei segnali, *in base alla gamma di frequenze* da essi occupata.

Nell'elettronica, dunque:

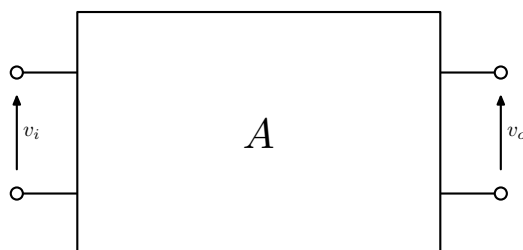
**Definizione 2.** *Il filtro è un quadripolo, dotato di un ingresso e di una uscita, il quale opera una selezione sui segnali che pervengono all'ingresso, in base alla loro frequenza: se la frequenza è compresa in una gamma prestabilita, il segnale passa in uscita, altrimenti, se è esterna alla gamma prestabilita, il segnale viene respinto e non passa.*

Schematizziamo il filtro mediante il quadripoli di figura, nel quale  $v_i$  e  $v_o$  sono i segnali in entrata ed in uscita.

---

<sup>11</sup>In senso lato anche una persona può operare da filtro, quando ha il compito di controllare l'accesso ad un dato luogo. Ad esempio una *guardia* che controlla l'ingresso di un edificio: solo le persone autorizzate, che sono dotate di un permesso possono entrare, mentre le altre persone, che non hanno tale permesso, vengono respinte. Notiamo che la funzione di sbarramento della guardia implica una corrispondente azione di selezione sulle persone. Dicendo che la guardia opera come un filtro intendiamo riferirci proprio a questa funzione di selezione.

<sup>12</sup>Per *filtro software* spesso si intende un programma informatico che elabora un segnale, calcolando, sui punti presi tramite un sistema di acquisizione, le sue componenti e selezionando quest'ultime.



Analizziamo il suo funzionamento supponendo che il segnale in entrata sia un *segnale alternato sinusoidale* con la generica ed arbitraria frequenza  $f$ , in modo che sia possibile solamente:

- o che il segnale *passi*;
- oppure che il segnale *non passi*.

Nelle applicazioni reali, invece, il segnale in entrata potrà essere una combinazione qualsiasi di segnali alternati sinusoidali, dei quali alcuni supereranno il filtro ed altri no.

Conveniamo che *il segnale passa*, quando lo ritroviamo in uscita, con i medesimi parametri ed in particolare con la stessa ampiezza ed in fase con  $v_i$ . In pratica il segnale supera il filtro *senza subire alcuna attenuazione in ampiezza* e quindi risulta:  $v_o = v_i$ .

Conveniamo, viceversa, che *il segnale non passa*, quando non lo ritroviamo in uscita. In questo caso il segnale  $v_i$  applicato in entrata viene *totalmente attenuato* dal filtro e quindi risulta, sempre idealmente:  $v_o = 0$ .

L'attenuazione operata dal filtro sul segnale viene espressa attraverso *il coefficiente di attenuazione*, così definito:

**Definizione 3.** Si definisce attenuazione,  $A$ , di un filtro il rapporto tra le ampiezze dei segnali di uscita e di entrata del filtro:

$$A = \frac{v_o}{v_i}$$

Il valore dell'attenuazione è, per un filtro, *funzione della frequenza*. Infatti, a seconda della frequenza del segnale, l'attenuazione assume, idealmente, valore:

- $A = 1$  quando il segnale *passa*
- $A = 0$  quando il segnale *non passa*

Pertanto, dato che il segnale viene selezionato (passa o non passa) in base alla frequenza, il valore di  $A$  viene a *dipendere* dalla *frequenza* del segnale.

Chiamiamo: risposta in frequenza del filtro il grafico che rappresenta sul piano

cartesiano l'andamento di  $A$  al variare della frequenza.

Chiamiamo: *banda passante* del filtro la gamma di valori per la quale il segnale *passa*.

Chiamiamo invece: *banda oscura* o anche *banda di reiezione* del filtro la gamma di valori per la quale il segnale *non passa*.

### Le tipologie

Esistono 4 tipologie fondamentali di filtro:

- **filtro passa basso:**

passano i segnali aventi frequenza minore di un valore prefissato, denominato *frequenza di taglio*,  $f_T$ , del filtro.

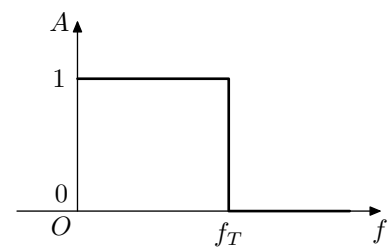
L'attenuazione assume:

valore 1 quando risulta:  $f < f_T$ ;

valore 0 quando invece:  $f > f_T$ .

La risposta in frequenza ideale del filtro passa basso è riportata in figura.

La *banda passante* corrisponde alla gamma di valori per i quali:  $f < f_T$



- **filtro passa alto:**

passano i segnali aventi frequenza maggiore di un valore prefissato, denominato *frequenza di taglio*,  $f_T$ , del filtro.

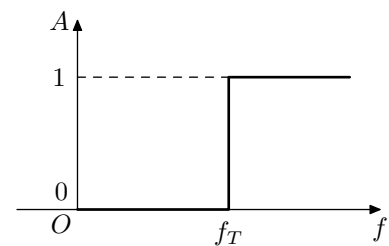
L'attenuazione assume:

valore 1 quando risulta:  $f > f_T$ ;

valore 0 quando invece:  $f < f_T$ .

La risposta in frequenza ideale del filtro passa alto è riportata in figura.

La *banda passante* corrisponde alla gamma di valori per i quali:  $f > f_T$



- **filtro passa banda:**

passano i segnali aventi frequenza compresa tra due valori prefissati, denominati rispettivamente: *frequenza di taglio inferiore*,  $f_1$ , e *frequenza di taglio superiore*,

$f_2$ , del filtro.

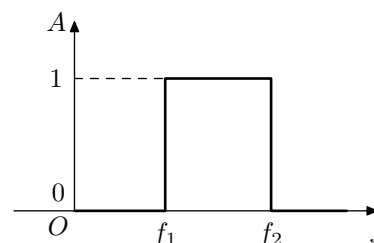
L'attenuazione assume:

valore 1 quando risulta:  $f_1 < f < f_2$ ;

valore 0 quando invece:  $f < f_1$  ed  $f > f_2$ .

La risposta in frequenza ideale del filtro passa banda è riportata in figura.

La *banda passante* corrisponde alla gamma di valori per i quali:  $f_1 < f < f_2$



### • filtro escludi banda:

passano i segnali aventi frequenza esterna alla gamma individuata dai due valori prefissati di *frequenza di taglio* inferiore,  $f_1$ , e *frequenza di taglio* superiore,  $f_2$ , del filtro.

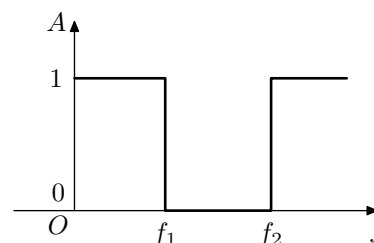
L'attenuazione assume:

valore 1 quando risulta:  $f < f_1$  ed  $f > f_2$ ;

valore 0 quando invece:  $f_1 < f < f_2$ .

La risposta in frequenza ideale del filtro escludi banda è riportata in figura.

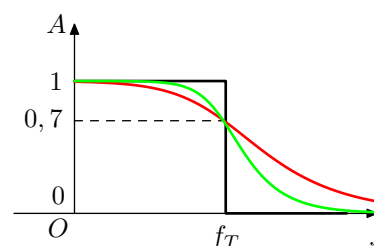
La *banda di reiezione* è data dalla gamma di valori per i quali:  $f_1 < f < f_2$



## Risposte reali

Nella risposta ideale la transizione tra la banda passante e la banda oscura è netta. Ad esempio, nel filtro passa basso essa avviene in corrispondenza della  $f_T$  e ciò è di difficile realizzazione pratica.

Nei filtri reali, pertanto, la risposta in frequenza segue una curva matematica, di solito una polinomiale, più o meno complessa. Il grafico della risposta reale si avvicina alla risposta ideale con una certa approssimazione, tanto più buona, quanto più è elevato il *grado* della polinomiale implementata.



Un filtro è detto del *primo*, *secondo*, *terzo ordine*, etc, quanto la curva matematica implementata è di *primo*, *secondo*, *terzo grado*, etc.

Nel filtro del *primo ordine* la risposta reale riproduce solo sommariamente la risposta ideale.

Aumentando l'ordine del filtro la risposta migliora, ma aumenta anche la complessità del filtro.

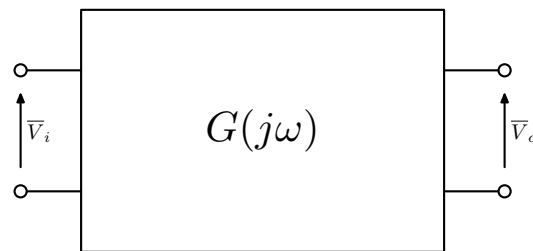


Come appare evidente dalla figura, nel filtro reale non c'è più una frequenza di taglio netta. La frequenza di taglio viene, allora, definita convenzionalmente:

**Definizione 4.** Si definisce frequenza di taglio di un filtro reale, quel valore di frequenza per il quale l'attenuazione è il 70% del suo valore massimo.

### La funzione di trasferimento

Abbiamo visto che il filtro è un particolare quadripolo, il quale riceve in entrata il segnale alternato  $v_i(t)$  e risponde con il segnale  $v_o(t)$ . Per analizzare il filtro in regime alternato, *a.c.* utilizziamo il metodo simbolico e, a tal fine, sostituiamo ai segnali di entrata ed uscita, i rispettivi valori simbolici, rispettivamente:  $\bar{V}_i$  e  $\bar{V}_o$ .



Eseguendo il loro rapporto si ottiene una quantità complessa, il cui valore dipende univocamente dalla frequenza. Essa è chiamata per questo: *funzione di trasferimento del filtro*.

**Definizione 5.** Si definisce funzione di trasferimento,  $G(j\omega)$ , del filtro il rapporto tra i valori simbolici dei segnali in uscita ed in entrata del filtro <sup>13</sup>.

$$G(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i}$$

La funzione di trasferimento non va confusa con l'attenuazione, in quanto essa contiene oltre all'informazione relativa alle ampiezze dei due segnali, anche l'informazione relativa al loro, eventuale, sfasamento. Possiamo estrarre queste due informazioni, calcolando il modulo e la fase della funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} A &= |G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}(G(j\omega)^2) + \text{Im}(G(j\omega)^2)} \\ \varphi &= \arctan \frac{\text{Im}(G(j\omega))}{\text{Re}(G(j\omega))} \end{aligned}$$

<sup>13</sup>Ad un livello superiore di analisi, invece del metodo simbolico viene utilizzata la trasformata di Laplace, per cui la funzione di trasferimento è definita più esattamente come rapporto tra le trasformate di Laplace dei segnali in uscita ed in entrata del filtro.

Mentre l'attenuazione presenta un andamento che si avvicina ad una delle tipologie su riportate, lo sfasamento dovrebbe idealmente risultare identicamente nullo a tutte le frequenze.

In un filtro reale, però, capita che il segnale di uscita del filtro non sia perfettamente in fase con il segnale applicato in ingresso, ma presenti uno sfasamento più o meno accentuato.

D'altronde, dato che nella banda oscura non è importante lo sfasamento, visto che il segnale non passa, si adotta allora, nella pratica, la condizione meno restrittiva che, limitatamente alla sola banda passante, il segnale di uscita non presenti uno sfasamento apprezzabile rispetto all'entrata.

## 2.4.2 Filtri reali

### L'elemento filtrante

Per realizzare concretamente un filtro è necessario disporre di componenti in grado di *modificare il proprio comportamento elettrico* a seconda della *frequenza* del segnale in entrata. Componenti di questo tipo sono denominati: *elementi filtranti* e sono il *condensatore* e la *bobina*. Infatti tali componenti si comportano in *a.c.* come una reattanza il cui valore cambia al variare della frequenza.

- **il condensatore come elemento filtrante**

La reattanza capacitiva è inversamente proporzionale alla frequenza.

A frequenze molto basse la reattanza diventa molto grande, dunque:

$$\text{per } f \rightarrow 0 \quad X_C \rightarrow \infty$$

Assimiliamo il condensatore, alle basse frequenze, ad un *isolante perfetto*, od anche, ad un *interruttore aperto*.

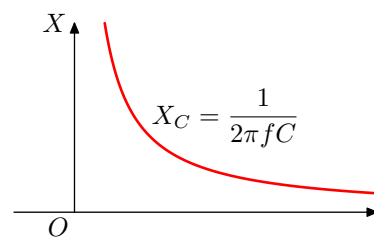
Invece, a frequenza molto alte la reattanza del condensatore diventa molto bassa, quindi:

$$\text{per } f \rightarrow \infty \quad X_C \rightarrow 0$$

Assimiliamo il condensatore, alle alte frequenze, ad un *conduttore perfetto*, od anche, ad un *interruttore chiuso*.

Tutto ciò suggerisce di considerare il condensatore come un *interruttore comandato dalla frequenza*: aperto alle basse frequenze e chiuso alle alte frequenze.

Si tratta di un modello chiaramente semplificato, dato che il comportamento del condensatore in *a.c.*, lo ribadiamo, è descritto dalla sua reattanza. Tuttavia, quando si seglie di utilizzare il condensatore come elemento filtrante, questo modello ci consente di comprendere velocemente come inserire il componente (in serie o in



parallelo), per ottenere una data tipologia di filtro.

- **la bobina come elemento filtrante**

La reattanza induttiva è direttamente proporzionale alla frequenza.

A frequenze molto basse la reattanza è molto piccola, dunque:

$$\text{per } f \rightarrow 0 \quad X_L \rightarrow 0$$

Assimiliamo la bobina, alle basse frequenze, ad un *conduttore perfetto*, od anche, ad un *interruttore chiuso*.

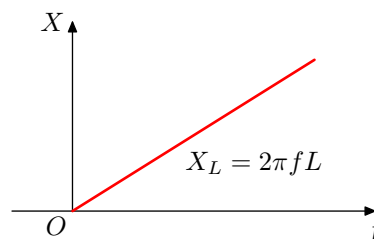
Invece, a frequenza molto alte la reattanza della bobina è molto grande, quindi:

$$\text{per } f \rightarrow \infty \quad X_L \rightarrow \infty$$

Assimiliamo la bobina, alle alte frequenze, ad un *isolante perfetto*, od anche, ad un *interruttore aperto*.

Notiamo che la bobina ha comportamento simile, ma duale a quello del condensatore e ciò ci suggerisce di considerare anche la bobina come un *interruttore comandato dalla frequenza*: chiuso alle basse frequenze e aperto alle alte frequenze.

Anche questo modello della bobina è semplificato e tuttavia, proprio per la sua semplicità, indubbiamente efficace.



- **Analisi qualitativa e analisi quantitativa**

Definiamo *analisi qualitativa* una analisi fatta sommariamente, considerando gli elementi filtranti come interruttori comandati in frequenza.

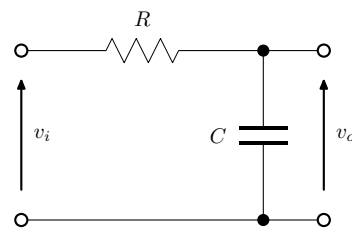
L'analisi qualitativa viene svolta solo nelle condizioni particolari, di solito frequenze molto basse, oppure molto alte, per le quali si possa assimilare l'elemento filtrante ad un interruttore. Essa permette di identificare velocemente la tipologia di un filtro, ma non consente di prevedere quale sarà l'effettivo andamento dell'attenuazione con la frequenza.

Per raggiungere questo obiettivo è necessaria una analisi, più rigorosa, di tipo quantitativo.

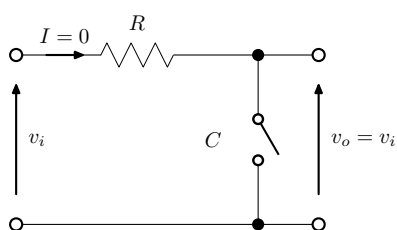
Definiamo *analisi simbolica* una analisi *quantitativa*, fatta con il metodo dei numeri complessi, con la quale ricavare matematicamente prima l'espressione della funzione di trasferimento e, poi, dell'attenuazione del filtro.

### Filtro passa basso $RC$

In questa sezione esaminiamo il circuito  $RC$  di figura, il quale utilizza come unico elemento filtrante un condensatore. Faremo prima una breve analisi qualitativa, allo scopo di individuare la tipologia del filtro, e, di seguito, l'analisi quantitativa con il metodo simbolico.



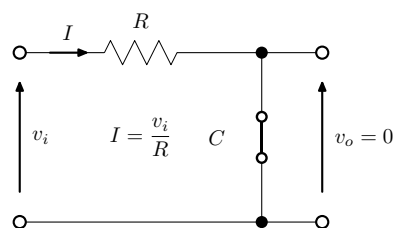
#### • analisi qualitativa



Alle *basse frequenze* il condensatore equivale ad un *interruttore aperto*, quindi non circola corrente.

La *d.d.p.* sulla resistenza è nulla e la tensione di uscita corrisponde alla tensione in entrata.

Pertanto *il segnale passa*.



Alle *alte frequenze* il condensatore equivale ad un *interruttore chiuso*, quindi circola corrente.

La tensione in uscita è nulla, mentre tutta la tensione di entrata cade sulla resistenza.

Pertanto *il segnale non passa*.

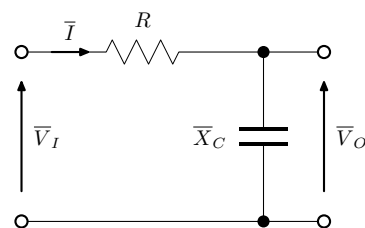
Concludiamo che il circuito si comporta come un *filtro passa basso*.

#### • analisi simbolica

Riprendiamo lo schema del filtro passa basso  $RC$  e lo analizziamo con il *metodo simbolico*, nella ipotesi che esso sia *a vuoto*, ovvero che in uscita non sia applicato alcun carico.

In entrata supponiamo sia applicata la tensione simbolica  $\bar{V}_i$ . Essendo i componenti in serie, essi oppongono una impedenza totale data dalla loro somma e sono attraversati dalla corrente  $\bar{I}$ . Applicando il 2° principio di Kirchhoff alle maglie di entrata e di uscita, otteniamo le equazioni per  $\bar{V}_i$  e  $\bar{V}_o$ :

$$\begin{aligned}\bar{V}_i &= (R + \bar{X}_C) \cdot \bar{I} \\ \bar{V}_o &= \bar{X}_C \cdot \bar{I}\end{aligned}$$



Dalla prima equazione otteniamo la corrente:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_i}{R + \bar{X}_C}$$

Facendo, invece, il rapporto tra le due equazioni, cioè tra  $\bar{V}_o$  e  $\bar{V}_i$ , ricaviamo la *funzione di trasferimento*,  $G(j\omega)$  del filtro:

$$G(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} = \frac{\bar{X}_C \cdot \bar{I}}{(R + \bar{X}_C) \cdot \bar{I}} = \frac{\bar{X}_C}{R + \bar{X}_C}$$

Sapendo che:

$$\bar{X}_C = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$$

esplicitiamo la dipendenza dalla frequenza nella funzione di trasferimento:

$$G(j\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

Facciamo denominatore comune e semplifichiamo:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

Si tratta di una *funzione razionale fratta* di *primo grado* nella variabile  $\omega$ , che rappresenta la frequenza, e per questo motivo il filtro è detto del *primo ordine*.

Nella funzione di trasferimento sono contenute due informazioni: quella relativa all'*attenuazione* tra entrata ed uscita, e quella relativa allo *sfasamento* dell'uscita rispetto all'entrata.

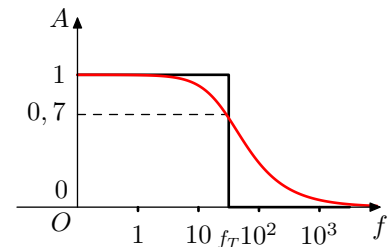
- Per l'attenuazione abbiamo:

$$A = |G(j\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega RC|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

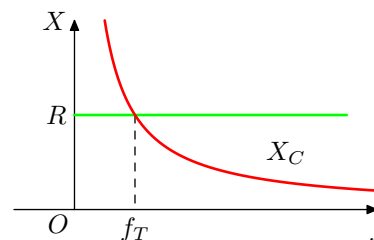
Per  $f \rightarrow 0$ :  $A = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$ ;

Per  $f \rightarrow \infty$ :  $A = \frac{1}{\sqrt{1+\infty}} = 0$ .

Si verifica facilmente, con lo studio di funzione, che l'andamento dell'attenuazione è quello di figura, nel quale la frequenza è espressa in unità logaritmiche, cioè per decadi.



Alla frequenza di taglio l'attenuazione si deve ridurre al 70% del valore massimo. Mostriamo che ciò avviene quando il valore della reattanza, che cambia con la frequenza, diventa uguale al valore della resistenza, che invece è un parametro costante.



Posto infatti:

$$X_C = R$$

otteniamo:

$$\omega RC = 1$$

e quindi:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

Esplicitiamo l'uguaglianza rispetto alla frequenza e ricaviamo il valore della frequenza di taglio:

$$f = f_T = \frac{1}{2\pi RC}$$

- Per lo sfasamento abbiamo:

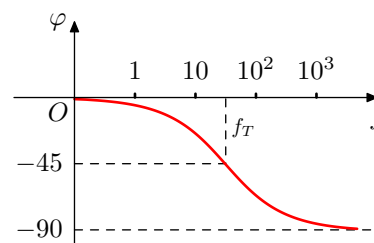
$$\varphi(G(j\omega)) = \varphi\left(\frac{1}{1 + j\omega RC}\right) = -\arctan(\omega RC)$$

Per  $f \rightarrow 0$  lo sfasamento è nullo;

Per  $f \rightarrow \infty$  lo sfasamento tende a  $-90^\circ$ .

Alla frequenza di taglio, dove  $\omega RC = 1$ , otteniamo  $\varphi = -\arctan(1) = -45^\circ$ .

L'andamento dello sfasamento con la frequenza, espressa in unità logaritmiche, è riportato in figura.



Nella banda passante lo sfasamento dell'uscita rispetto all'entrata si mantiene in valore assoluto inferiore ai  $45^\circ$  essendo quindi alquanto modesto. Valori più elevati di sfasamento si hanno nella banda oscura, dove però il segnale non passa.

### • dimensionamento dei componenti

Ci proponiamo ora di realizzare, per una data applicazione, un filtro  $RC$  passa basso .

L'operazione richiesta in questa fase è l'individuazione dello schema adatto allo scopo ed il *dimensionamento dei componenti*, ovvero l'assegnazione di un valore

alla resistenza ed al condensatore, in funzione del valore di frequenza di taglio che, nella applicazione data, si desidera ottenere.

Useremo l'espressione della frequenza di taglio come *formula di progetto* del filtro. Poiché ci sono due parametri da dimensionare ed una sola espressione, uno dei due parametri è *libero* e pertanto viene scelto con ampi margini di discrezionalità, mentre l'altro parametro viene calcolato di conseguenza.

Dato che la corrente circolante dipende dal valore della  $R$ , si fa in modo che il suo valore sia almeno di  $1k\Omega$  e rientri nella fascia:  $1k\Omega \div 100k\Omega$ ; relativamente al condensatore, si richiede, perché sia significativo, che il suo valore sia almeno di  $1nF$  e rientri nella fascia:  $1nF \div 1\mu F$ . Per andare sopra i  $\mu F$  si dovrebbero usare i condensatori elettrolitici.

Si procede con una serie di tentativi, finché si ottengono per entrambi i parametri valori soddisfacenti.

### • Esempio 1

Realizzare un filtro  $RC$  con frequenza di taglio di  $33kHz$ .

La *formula di progetto* per il passa basso  $RC$  è :  $f_T = \frac{1}{2\pi RC}$

#### • 1° tentativo

poniamo:  $R = 10k\Omega$

invertiamo la formula di progetto e ricaviamo  $C$ :

$$C = \frac{1}{2\pi R f_T} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 33 \cdot 10^3} = 0,48nF$$

il valore ottenuto è inferiore al  $nF$ , quindi facciamo un secondo tentativo.

#### • 2° tentativo

diminuiamo il valore della resistenza, ponendo:  $R = 2,2k\Omega$

ricalcoliamo  $C$ :

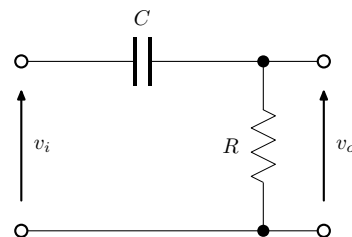
$$C = \frac{1}{2\pi R f_T} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 2,2 \cdot 10^3 \cdot 33 \cdot 10^3} = 2,19nF \approx 2,2nF$$

il valore, ora, rientra nella fascia prevista e quindi viene accettato.

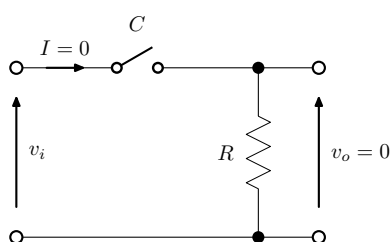
Nel *funzionamento reale* il comportamento del filtro  $RC$  può essere influenzato dalla *sorgente* e dal *carico*. Il *carico*, infatti, presenta un proprio valore *resistivo*, il quale si connette in *parallelo* al condensatore, determinando una serie di effetti, tra i quali un'*alterazione del valore della frequenza di taglio* del filtro. Perché l'effetto sia minimo occorre che la *resistenza di carico* sia *molto maggiore* della *resistenza del filtro*:  $R_C \gg R$ .

### Filtro passa alto $CR$

Il filtro passa alto si ottiene scambiando le posizioni della resistenza e del condensatore. Procediamo di seguito prima con l'analisi qualitativa, e, poi, con l'analisi quantitativa, mediante il metodo simbolico.



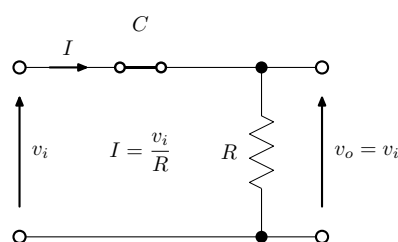
#### • analisi qualitativa



Alle *basse frequenze* il condensatore equivale ad un *interruttore aperto*, quindi non circola corrente.

La tensione di uscita è *nulla* in quanto la *d.d.p.* sulla resistenza è nulla.

Pertanto *il segnale non passa*.



Alle *alte frequenze* il condensatore equivale ad un *interruttore chiuso*, quindi circola corrente.

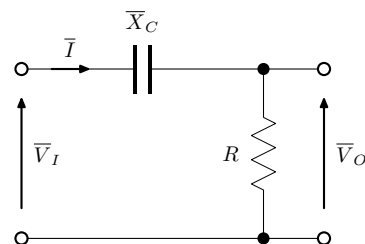
Ai capi del condensatore non c'è *d.d.p.*, quindi le *d.d.p.*  $v_i$  e  $v_o$  sono uguali.

Pertanto *il segnale passa*.

Concludiamo che il circuito si comporta come un *filtro passa alto*.

#### • analisi simbolica

Riprendiamo schema del filtro passa alto  $CR$  e lo analizziamo con il *metodo simbolico*, nella ipotesi che esso sia *a vuoto*, ovvero che in uscita non sia applicato alcun carico.



In entrata supponiamo applicata la tensione simbolica  $\bar{V}_i$ . Essendo i componenti in serie, essi oppongono una impedenza totale data dalla loro somma e sono attraversati dalla corrente  $\bar{I}$ . Applicando il 2° principio di Kirchhoff alle maglie di entrata e di uscita, otteniamo le equazioni per  $\bar{V}_i$  e  $\bar{V}_o$ :

$$\begin{aligned}\bar{V}_i &= (\bar{X}_C + R) \cdot \bar{I} \\ \bar{V}_o &= R \cdot \bar{I}\end{aligned}$$



Dalla prima equazione otteniamo la corrente:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_i}{R + \bar{X}_C}$$

Facendo invece il rapporto tra le due equazioni otteniamo la *funzione di trasferimento*,  $G(j\omega)$  del filtro:

$$G(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} = \frac{R \cdot \bar{I}}{(R + \bar{X}_C) \cdot \bar{I}} = \frac{R}{R + \bar{X}_C}$$

Sapendo che:

$$\bar{X}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

esplicitiamo la dipendenza dalla frequenza nella funzione di trasferimento:

$$G(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

Facendo denominatore comune e semplificando si ottiene:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

Si tratta, anche per il passa alto, di una *funzione razionale fratta di primo grado* nella variabile  $\omega$ , per cui anche questo filtro è del *primo ordine*.

Dalla funzione di trasferimento ricaviamo l'*attenuazione* e lo *sfasamento* dell'uscita rispetto all'entrata.

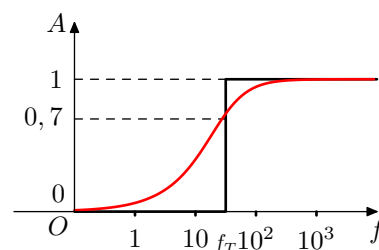
- Per l'attenuazione abbiamo:

$$A = |G(j\omega)| = \frac{|j\omega RC|}{|1 + j\omega RC|} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Per  $f \rightarrow 0$ :  $A = \frac{0}{\sqrt{1+0}} = 0$ ;

Per  $f \rightarrow \infty$ :  $A = \frac{\infty}{\sqrt{1+\infty}} = 1$

L'andamento dell'attenuazione con la frequenza, espressa in unità logaritmiche, risulta quello di figura.



Alla frequenza di taglio l'attenuazione si deve ridurre al 70% del valore massimo.

Mostriamo che, anche per il passa alto, ciò avviene quando il valore della reattanza diventa uguale al valore della resistenza. Abbiamo infatti:

$$X_C = R \implies \omega RC = 1$$

e quindi:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

Esplicitando l'uguaglianza rispetto alla frequenza, riotteniamo la stessa espressione della frequenza di taglio già vista per il passa basso:

$$f = f_T = \frac{1}{2\pi RC}$$

- Per lo sfasamento abbiamo:

$$\varphi(G(j\omega)) = \varphi\left(\frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}\right)$$

Dividendo ambo i membri di  $G(j\omega)$  per  $j\omega RC$ , otteniamo:

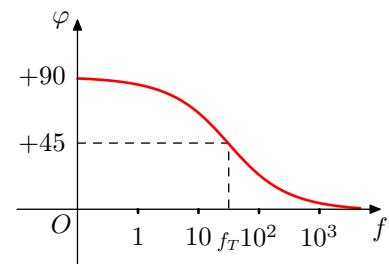
$$\varphi(G(j\omega)) = \varphi\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega RC}}\right) = \varphi\left(\frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega RC}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Per  $f \rightarrow 0$  lo sfasamento è  $+90^\circ$ ;

Per  $f \rightarrow \infty$  lo sfasamento tende a 0.

Alla frequenza di taglio, dove  $\omega RC = 1$ , otteniamo  $\varphi = \arctan(1) = +45^\circ$ .

L'andamento dello sfasamento con la frequenza, espressa in unità logaritmiche, è riportato in figura.



Anche per il passa alto, nella banda passante lo sfasamento dell'uscita rispetto all'entrata si mantiene in valore assoluto inferiore ai  $45^\circ$ .

### • dimensionamento dei componenti

Il dimensionamento del filtro  $CR$  passa alto si fa nella stessa modalità del passa basso.

Useremo, dunque, l'espressione della frequenza di taglio come *formula di progetto* del filtro. Uno dei due parametri è *libero* e pertanto viene scelto con discrezionalità, mentre l'altro viene calcolato di conseguenza.

Useremo ancora per la  $R$  la fascia:  $1k\Omega \div 100k\Omega$ , mentre per  $C$  la fascia:  $1nF \div 1\mu F$  e procederemo con una serie di tentativi, finché si otterranno per entrambi i parametri valori soddisfacenti.

- **Esempio 2**

Realizzare un filtro  $CR$  con frequenza di taglio di  $27kHz$ .

La *formula di progetto* per il passa alto  $CR$  è sempre:  $f_T = \frac{1}{2\pi RC}$

- **1° tentativo**

poniamo:  $R = 2,2k\Omega$

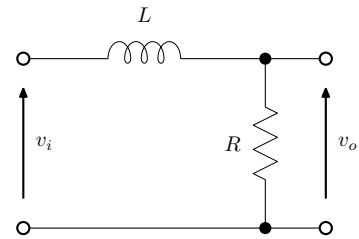
invertiamo la formula di progetto e ricaviamo  $C$ :

$$C = \frac{1}{2\pi R f_T} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 2,2 \cdot 10^3 \cdot 27 \cdot 10^3} = 2,68nF \approx 2,7nF$$

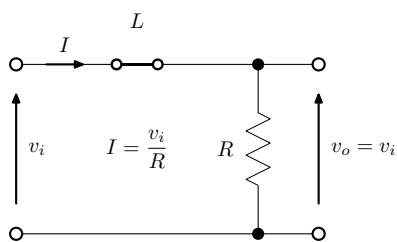
il valore ottenuto rientra nella fascia prevista e quindi viene accettato.

### Filtro passa basso $LR$

Consideriamo ora lo schema di figura, nel quale viene utilizzato come elemento filtrante una bobina connessa in serie. Procediamo al solito prima con l'analisi qualitativa, e poi, con l'analisi quantitativa, mediante il metodo simbolico.



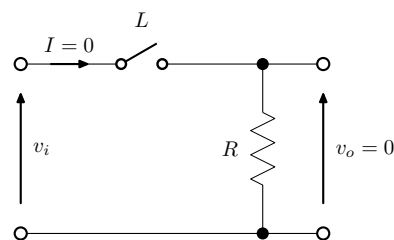
- **analisi qualitativa**



Alle *basse frequenze* la bobina equivale ad un *interruttore chiuso*, quindi circola corrente.

Ai capi della bobina non c'è *d.d.p.*, quindi le *d.d.p.*  $v_i$  e  $v_o$  sono uguali.

Pertanto *il segnale passa*.



Alle *alte frequenze* la bobina equivale ad un *interruttore aperto*, quindi non circola corrente.

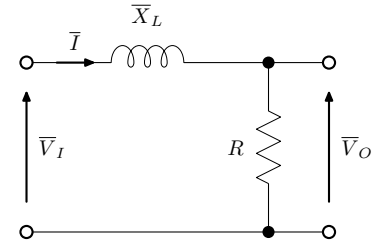
La tensione di uscita è *nulla* in quanto la *d.d.p.* sulla resistenza è nulla.

Pertanto *il segnale non passa*.

Concludiamo che il circuito si comporta come un *filtro passa basso*.

- **analisi simbolica**

Riprendiamo schema del filtro passa basso  $LR$  e lo analizziamo con il *metodo simbolico*, nella ipotesi che esso sia *a vuoto*, ovvero che in uscita non sia applicato alcun carico.



In entrata supponiamo sia applicata la tensione simbolica  $\bar{V}_i$ . Applicando il 2° principio di Kirchhoff alle maglie di entrata e di uscita, otteniamo le equazioni per  $\bar{V}_i$  e  $\bar{V}_o$ :

$$\begin{aligned}\bar{V}_i &= (\bar{X}_L + R) \cdot \bar{I} \\ \bar{V}_o &= R \cdot \bar{I}\end{aligned}$$

Dalla prima equazione otteniamo la corrente:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_i}{R + \bar{X}_L}$$

Facendo, invece, il rapporto tra le due equazioni, ricaviamo la *funzione di trasferimento*,  $G(j\omega)$  del filtro:

$$G(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} = \frac{R \cdot \bar{I}}{(R + \bar{X}_L) \cdot \bar{I}} = \frac{R}{R + \bar{X}_L}$$

Sapendo che:

$$\bar{X}_L = j\omega L$$

esplicitiamo la dipendenza dalla frequenza nella funzione di trasferimento:

$$G(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L}$$

Dividendo sopra e sotto per  $R$  si ottiene:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$$

L'espressione è una *razionale fratta* di *primo grado* nella variabile  $\omega$ , quindi è del *primo ordine* e si riconduce a quella del filtro passa basso  $RC$ , introducendo la costante di tempo:

$$\tau_L = \frac{L}{R}$$

Esplicitiamo, dalla funzione di trasferimento, l'*attenuazione* e lo *sfasamento* dell'uscita rispetto all'entrata.

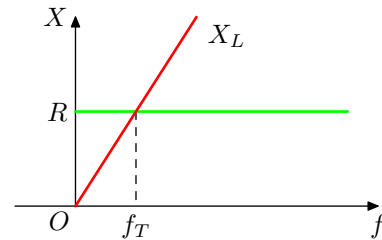
- Per l'attenuazione abbiamo:

$$A = |G(j\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega\tau_L|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau_L)^2}}$$

- Per lo sfasamento abbiamo:

$$\varphi(G(j\omega)) = \varphi\left(\frac{1}{1 + j\omega\tau_L}\right) = -\arctan\left(\omega\frac{L}{R}\right)$$

Anche nel filtro  $LR$ , si ha la frequenza di taglio quando il valore della reattanza, che cambia con la frequenza, diventa uguale al valore della resistenza:



Abbiamo infatti:

$$X_L = R \quad \Rightarrow \quad \omega\frac{L}{R} = 1$$

e quindi:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

Esplicitando l'uguaglianza rispetto alla frequenza, otteniamo:

$$f = f_T = \frac{1}{2\pi\tau_L}$$

### • dimensionamento dei componenti

Anche per dimensionamento del filtro  $LR$  passa basso si procede in modo simile al dimensionamento dei filtri precedenti.

Useremo ancora l'espressione della frequenza di taglio come *formula di progetto*.

Useremo per la  $R$  la fascia:  $1k\Omega \div 100k\Omega$ ; per la  $L$  c'è minore possibilità di scelta in quanto spesso il componente è autocostruito. Valori tipici vanno da qualche  $\mu H$  a decine di  $mH$ . Convienne allora prima fissare il valore della bobina e poi ricavare la  $R$ .

### • Esempio 3

Con una  $L$  di  $1,5mH$ , realizzare un filtro  $LR$  con  $f_T$  di  $50kHz$ .

La *formula di progetto* per il passa basso  $LR$  è:  $f_T = \frac{R}{2\pi L}$

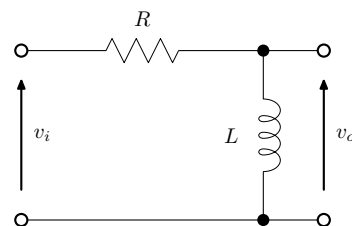
### • svolgimento

avendo già il valore di  $L$  basta invertire la formula di progetto e ricavare  $R$ :

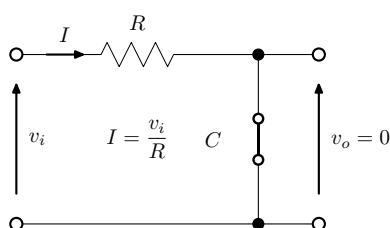
$$R = 2\pi L f_T = 2 \cdot 3,14 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^3 = 471\Omega \approx 470\Omega$$

### Filtro passa alto $RL$

Invertiamo nello schema le posizioni della resistenza e della bobina. Procediamo, al solito, prima con l'analisi qualitativa, e, poi, con l'analisi quantitativa, mediante il metodo simbolico.



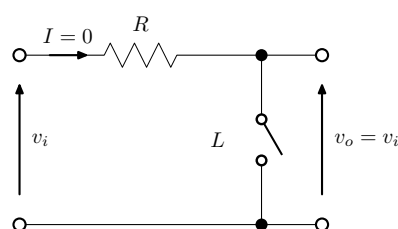
#### • analisi qualitativa



Alle *basse frequenze* la bobina equivale ad un *interruttore chiuso*, quindi circola corrente.

La tensione in uscita è *nulla*, mentre tutta la tensione di entrata cade sulla resistenza.

Pertanto *il segnale non passa*.



Alle *alte frequenze* la bobina equivale ad un *interruttore aperto*, quindi non circola corrente.

La *d.d.p.* sulla resistenza è nulla e la tensione di uscita corrisponde alla tensione in entrata.

Pertanto *il segnale passa*.

Concludiamo che il circuito si comporta come un *filtro passa alto*.

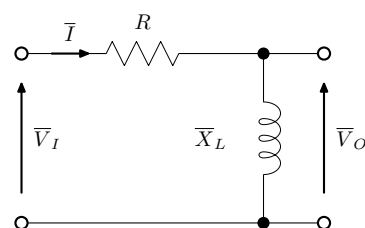
#### • analisi simbolica

Riprendiamo lo schema del filtro passa alto  $RL$  e lo analizziamo con il *metodo simbolico*, nella ipotesi che esso sia *a vuoto*, ovvero che in uscita non sia applicato alcun carico.

In entrata supponiamo applicata la tensione simbolica  $\bar{V}_i$ .

Applicando il 2° principio di Kirchhoff alle maglie di entrata e di uscita, otteniamo le equazioni per  $\bar{V}_i$  e  $\bar{V}_o$ :

$$\begin{aligned}\bar{V}_i &= (R + \bar{X}_L) \cdot \bar{I} \\ \bar{V}_o &= \bar{X}_L \cdot \bar{I}\end{aligned}$$



Dalla prima equazione otteniamo la corrente:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_i}{R + \bar{X}_L}$$

Facendo invece il rapporto tra le due equazioni otteniamo la *funzione di trasferimento*,  $G(j\omega)$  del filtro:

$$G(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} = \frac{\bar{X}_L \cdot \bar{I}}{(R + \bar{X}_L) \cdot \bar{I}} = \frac{\bar{X}_L}{R + \bar{X}_L}$$

Sapendo che:

$$\bar{X}_L = j\omega L$$

esplicitiamo la dipendenza dalla frequenza nella funzione di trasferimento:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

Dividendo sopra e sotto per  $R$  si ottiene:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$$

Si tratta di una *razionale fratta* di *primo grado* nella variabile  $\omega$ , per cui anche questo filtro è del *primo ordine* ed è riconducibile alla medesima espressione vista per il filtro  $CR$ , introducendo la costante di tempo  $\tau_L$ :

$$G(j\omega) = \frac{j\omega\tau_L}{1 + j\omega\tau_L}$$

Dalla funzione di trasferimento ricaviamo l'*attenuazione* e lo *sfasamento* dell'uscita rispetto all'entrata.

- Per l'attenuazione abbiamo:

$$A = |G(j\omega)| = \frac{|j\omega\tau_L|}{|1 + j\omega\tau_L|} = \frac{\omega\tau_L}{\sqrt{1 + (\omega\tau_L)^2}}$$

- Per lo sfasamento abbiamo:

$$\varphi(G(j\omega)) = \varphi\left(\frac{j\omega\tau_L}{1 + j\omega\tau_L}\right)$$

Dividendo ambo i membri di  $G(j\omega)$  per  $j\omega\tau_L$ , otteniamo:

$$\varphi(G(j\omega)) = \varphi\left(\frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega\tau_L}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\omega\tau_L}\right)$$

Anche per il passa alto  $RL$ , la frequenza di taglio si ottiene quando il valore della reattanza diventa uguale al valore della resistenza. Abbiamo infatti:

$$X_L = R \implies \omega \frac{L}{R} = 1$$

e quindi:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

L'espressione della frequenza di taglio è ancora:

$$f = f_T = \frac{1}{2\pi\tau_L}$$

- **dimensionamento dei componenti**

Per il dimensionamento del filtro  $RL$  passa alto si procede come per il filtro  $LR$ . Useremo l'espressione della frequenza di taglio, la stessa, come *formula di progetto*. Useremo per la  $R$  la fascia:  $1k\Omega \div 100k\Omega$ ; per la  $L$  restringeremo ancora la scelta ai valori che vanno da qualche  $\mu H$  a decine di  $mH$ . Prima fisseremo il valore della bobina e poi ricaveremo la  $R$ .

- **Esempio 4**

Con una  $L$  di  $5mH$ , realizzare un filtro  $RL$  con  $f_T$  di  $85kHz$ .

La *formula di progetto* per il passa alto  $LR$  è sempre:  $f_T = \frac{R}{2\pi L}$

- **svolgimento**

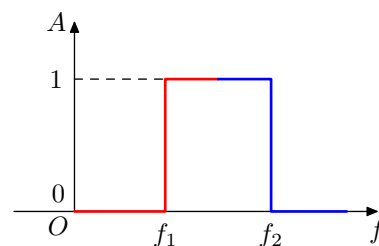
avendo già il valore di  $L$  invertiamo la formula di progetto e ricaviamo  $R$ :

$$R = 2\pi L f_T = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 85 \cdot 10^3 = 6,67k\Omega \approx 6,8k\Omega$$



### Filtro passa banda $CR - RC$

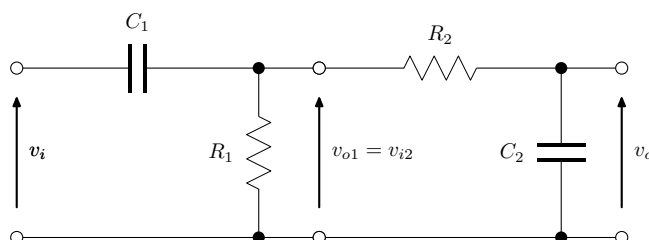
Per realizzare un *filtro passa banda*, nella risposta in frequenza dobbiamo riprodurre sia la *transizione basso - alto*, che avviene alla frequenza di taglio inferiore,  $f_1$ , che la *transizione alto - basso*, alla frequenza di taglio superiore,  $f_2$ , e perciò è necessario utilizzare almeno *due elementi filtranti*.



Osserviamo, intanto, che la prima transizione, basso - alto, corrisponde alla risposta di un *filtro passa alto*, con frequenza di taglio pari ad  $f_1$ , mentre la seconda transizione corrisponde a quella di un *filtro passa basso*, con frequenza di taglio  $f_2$ .

Perciò possiamo realizzare il filtro passa banda collegando di seguito un passa alto ed un passa basso.

Dimensioneremo  $C_1$   $R_1$  alla frequenza  $f_1$ , e  $C_2$   $R_2$  alla frequenza  $f_2$ .



Questa soluzione, però, funziona bene solo se la *banda passante è larga*. Infatti le risposte reali dei circuiti  $CR$  ed  $RC$  presentano una lenta transizione in corrispondenza delle rispettive frequenze di taglio e perciò le due curve reali si raccordano accettabilmente solo se  $f_1$  ed  $f_2$  sono debitamente distanziate, almeno di una decade di frequenza.

Inoltre il secondo filtro, essendo collegato in uscita del primo, lo carica, alterandone tutti i parametri di progetto, in particolare la frequenza di taglio. Per evitare problemi di solito si dimensiona la  $R_2$  in modo che sia molto più grande di  $R_1$ , almeno 10 volte.

Per questi motivi lo schema di base viene spesso modificato nella pratica, ad esempio scambiando le posizioni delle due resistenze, oppure ricorrendo ad elementi attivi. Filtri di questo tipo sono detti *filtri attivi*.

Spesso, nelle applicazioni, invece di fornire i valori delle due frequenze di taglio, si conoscono la *larghezza di banda* ed il *valore di centro banda*.

La *larghezza di banda*,  $B$ , corrisponde alla *gamma di valori compresi tra le due frequenze di taglio*:  $B = f_2 - f_1$ . Il *valore di centro banda*,  $f_0$ , è il valore, equidistante dalle due frequenze di taglio, in corrispondenza del quale la *risposta reale ha il suo massimo* e lo sfasamento tra ingresso ed uscita è nullo. In pratica è il punto in cui le due curve reali del passa alto e del passa basso si raccordano.

Contrariamente a quanto suggerisce l'intuizione il *valore di centro banda è la media*

*geometrica* e non la media aritmetica *delle due frequenze di taglio*:

$$f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2} \neq \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Infatti gli andamenti delle curve reali del passa basso e del passa alto sono simmetrici solo se sono rappresentati con la scala logaritmica, mentre nella scala lineare non sono affatto simmetrici.

Questo fatto complica un po' il procedimento per ricavare le frequenze di taglio, però, se la banda passante è molto stretta, l'errore che si commette usando la media aritmetica in luogo di quella geometrica è trascurabile ed allora le due frequenze di taglio si ottengono approssimativamente così:

$$f_1 \approx f_0 - \frac{B}{2} \quad f_2 \approx f_0 + \frac{B}{2}$$

### • Esempio 5

Realizzare un filtro passa banda con frequenza di taglio inferiore di  $1kHz$  e frequenza di taglio superiore di  $10kHz$ . Dimensionare i componenti e calcolare la risposta a centro banda, supponendo di applicare in entrata una tensione di  $1V$ .

Dato che le frequenze di taglio sono sufficientemente distanziate, realizziamo il filtro di banda con un passa alto seguito da un passa basso.

Utilizziamo come formule di progetto:

per il passa alto, che deve operare alla frequenza  $f_1$ , l'espressione della frequenza di taglio:  $f_1 = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$ ;

per il passa basso, che opera alla frequenza  $f_2$ , l'espressione della frequenza di taglio:  $f_2 = \frac{1}{2\pi R_2 C_2}$ ;

ed inoltre anche la condizione di non caricamento:  $R_2 \gg R_1$ .

### • Dimensionamento:

Si pone, nel passa alto:  $R_1 = 1k\Omega$

Invertiamo l'espressione di  $f_1$  e ricaviamo  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{1}{2\pi R_1 f_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3} = 159nF \approx 150nF$$

Si pone poi, nel passa basso:  $R_2 = 10 \cdot R_1 = 10k\Omega$

Invertiamo l'espressione di  $f_2$  e ricaviamo  $C_2$ :

$$C_2 = \frac{1}{2\pi R_2 f_2} = \frac{1}{1\pi \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^3} = 1,59nF \approx 1,5nF$$

Tutti i componenti rientrano nelle fasce accettabili, tuttavia si osserva una grande diversità nei valori dei due condensatori, causata dal fatto che nel secondo filtro *aumenta di un fattore dieci* sia la frequenza di taglio che il valore della resistenza.

- *Calcolo alla frequenza di centro banda:*

Calcoliamo intanto la frequenza di centro banda:

$$f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2} = \sqrt{1 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^3} = 3,16 \text{ kHz}$$

Calcoliamo le reattanze:

$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi f_0 C_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 3,16 \cdot 10^3 \cdot 159 \cdot 10^{-9}} = 317 \Omega$$

$$X_{C2} = \frac{1}{2\pi f_0 C_2} = \frac{1}{2\pi \cdot 3,16 \cdot 10^3 \cdot 1,59 \cdot 10^{-9}} = 31,7 \text{ k}\Omega$$

Calcoliamo l'impedenza totale (il secondo filtro è in parallelo al primo):

$$\bar{Z} = \bar{X}_{C1} + R_1 // (R_2 + \bar{X}_{C2})$$

Il calcolo simbolico dell'impedenza si presenta complicato, ma, avendo dimensionato la  $R_2$  con un valore elevato, ed essendo di conseguenza anche la  $C_2$  elevata, possiamo trascurare, nel parallelo la serie di  $R_2 + \bar{X}_{C2}$ . Ciò significa che i due filtri possono essere calcolati separatamente.

Per il primo filtro si ha:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_1 &= R_1 + \bar{X}_{C1} = (1 - j0,317) \text{ k}\Omega \\ \bar{I} &= \frac{\bar{V}_i}{\bar{Z}_1} = \frac{1}{1 - j0,317} \cdot 10^{-3} = (0,909 + j0,288) \text{ mA} \\ \bar{V}_{o1} &= R_1 \cdot \bar{I} = 1 \cdot 10^3 \cdot (0,909 + j0,288) \cdot 10^{-3} = (0,909 + j0,288) \text{ V} \end{aligned}$$

La tensione di uscita del primo filtro ha ampiezza solo leggermente inferiore a quella di ingresso, ma comunque non esattamente uguale.

Essa diventa la tensione di entrata del secondo filtro, per il quale abbiamo:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_2 &= R_2 + \bar{X}_{C2} = (10 - j31,7) \text{ k}\Omega \\ \bar{I}_2 &= \frac{\bar{V}_{o1}}{\bar{Z}_2} = \frac{0,909 + j0,288}{10 - j31,7} \cdot 10^{-3} = j0,0287 \text{ mA} \\ \bar{V}_o &= \bar{X}_{C2} \cdot \bar{I}_2 = -j31,7 \cdot 10^3 \cdot j0,0287 \cdot 10^{-3} = 0,91 \text{ V} \end{aligned}$$

La tensione di uscita del secondo filtro è reale, quindi alla frequenza  $f_0$ , non c'è alcun sfasamento tra ingresso ed uscita. La sua ampiezza è inferiore a quella di ingresso del 10%.

### 2.4.3 Questionario riepilogativo

1. Chiarire che cosa si intende per filtro, per risposta del filtro ideale e reale e per elemento filtrante.
2. Facendo riferimento alla tipologia del filtro chiarire la differenza tra banda passante e banda oscura, e tra banda stretta e banda larga.
3. In riferimento ad un filtro passa basso reale ( $RC$ , oppure  $LR$ ), introdurre il concetto di frequenza di taglio e ricavarne l'espressione.
4. Si chiede di chiarire le definizioni e le relazioni tra funzione di trasferimento, attenuazione e angolo di fase.
5. Analizzare un filtro  $CR$  (oppure  $RC$ ,  $LR$ ,  $RL$ ) ricavando la funzione di trasferimento, l'attenuazione e l'angolo di fase.
6. Un filtro ha una forma a  $T$ , con rispettivamente; una bobina  $L$ , una resistenza  $R$  ed una seconda bobina  $L$ . Individuare, con analisi qualitativa, la tipologia del filtro.
7. Un filtro ha una forma a  $\pi$  con rispettivamente: un condensatore  $C$ , una resistenza  $R$  ed un secondo condensatore  $C$ . Individuare, con analisi qualitativa, la tipologia del filtro.

### 2.4.4 Esercizi

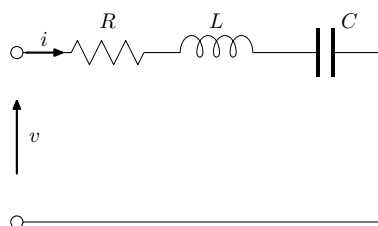
1. Dimensionare un filtro  $RC$  avente frequenza di taglio di  $8kHz$ . Tracciare i diagrammi relativi alla attenuazione ed alla fase. Supposto di fornire in ingresso un segnale avente ampiezza di  $4V_{pp}$  e frequenza,  $f = 12kHz$ , calcola con il metodo simbolico la tensione in uscita .
2. Disponendo di una bobina di  $2mH$ , realizzare un filtro passa basso avente frequenza di taglio di  $60kHz$ . Tracciare i diagrammi relativi alla attenuazione ed alla fase. Supposta:  $V_{iM} = 2,5V$  ed  $f = 30kHz$ , calcolare con il metodo simbolico la tensione in uscita.
3. Un filtro  $CR$  ha  $R = 15k\Omega$  e  $C = 3,3nF$ . Disegnare lo schema e determinare i parametri del filtro e l'andamento della attenuazione e della fase con la frequenza. Supposta:  $V_{iM} = 3V$ ,  $f = 10kHz$ , calcola con il metodo simbolico la tensione in uscita.
4. Un filtro  $RL$  ha  $R = 12k\Omega$  ed  $L = 47mH$ . Disegnare lo schema e determinare i parametri del filtro e l'andamento della attenuazione e della fase

con la frequenza. Supposta:  $V_{iM} = 2V$  ,  $f = 50kHz$ , calcola con il metodo simbolico la tensione in uscita.

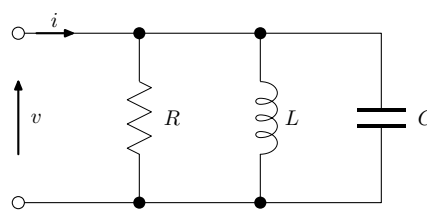
5. Partendo da un passa alto ed un passa basso, realizzare un passa banda avente frequenza bassa di  $1kHz$  e frequenza alta di  $25kHz$ . Supposta:  $V_{iM} = 5V$  ,  $f = 5kHz$ , calcola con il metodo simbolico la tensione in uscita .
6. Un filtro  $C1R1 - R2C2$  ha:  $C1 = 330nF$ ,  $C = 2,2nF$ ,  $R1 = 1k\Omega$  ed  $R2 = 15k\Omega$  . Individuare la tipologia del filtro e determinare le frequenze notevoli. Tracciare la risposta in frequenza.

## 2.5 Circuiti risonanti

Si chiamano *circuiti risonanti* i circuiti al cui interno agiscono almeno *due elementi reattivi indipendenti di segno opposto*: almeno un condensatore e almeno una bobina. Nel caso più semplice, nel circuito risonante c'è un solo condensatore ed una sola bobina, per cui sono possibili solo le due connessioni serie e parallelo. I rispettivi circuiti sono denominati rispettivamente: *circuito risonante serie* e *circuito risonante parallelo*. Di solito nel circuito è presente anche una componente resistiva, la quale viene inserita in serie nel circuito risonante serie, ed in parallelo nel risonante parallelo.



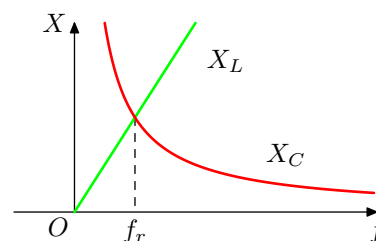
Circuito risonante serie



Circuito risonante parallelo

### 2.5.1 La risonanza

Riportiamo le reattanze della bobina e del condensatore in un grafico, ricordando che esse dipendono, rispettivamente linearmente ed inversamente, dalla frequenza. Notiamo dal confronto dei loro andamenti, che esse si incrociano sempre in un punto, in corrispondenza di un particolare valore di frequenza, denominata: *frequenza di risonanza*.



**Definizione 6.** Si definisce frequenza di risonanza il valore di frequenza per il quale le reattanze induttiva e capacitiva diventano, in modulo, uguali.

#### Espressione della frequenza di risonanza

Alla frequenza di risonanza,  $f_r$ , le due reattanze diventano in valore assoluto uguali:

$$X_C = X_L$$

EsPLICITIAMO le due espressioni e risolviamo rispetto alla frequenza, per ottenere l'espressione della frequenza di risonanza:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi f \cdot C} &= 2\pi f \cdot L \\ (2\pi f)^2 \cdot LC &= 1 \\ f = f_r &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\end{aligned}$$

### • La risonanza nel circuito risonante serie

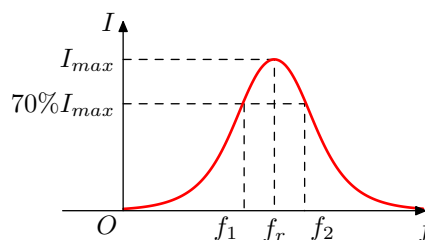
Nel circuito risonante serie, la *reattanza totale* è data dalla somma simbolica delle due reattanze:

$$\overline{X}_T = jX_L - jX_C = j(X_L - X_C)$$

Pertanto, alla frequenza di risonanza, la reattanza totale è nulla.

Il gruppo costituito dai due elementi reattivi si comporta, nel suo insieme, come se fosse un *conduttore perfetto* o anche un *interruttore chiuso*. I due componenti, pur essendo fisicamente presenti nel circuito, si mascherano vicendevolmente, rendendosi, nella serie, non visibili dal generatore.

Se, allora, eccitiamo il circuito con una *d.d.p.* avente proprio la frequenza di risonanza, esso risponde con una *corrente*, la cui ampiezza dipende esclusivamente dalla resistenza, ed in *fase* con la tensione applicata. Se la resistenza è di basso valore allora la corrente può essere molto grande.



Viceversa, al di fuori della zona di risonanza, la corrente risulta molto piccola e tendente a zero, in quanto: o è aperto il condensatore (basse frequenze), o è aperta la bobina (alte frequenze).

Otteniamo, pertanto, il picco di corrente di figura, il quale si manifesta solo per una ristretta gamma di frequenze, molto vicine al valore di risonanza, dove l'effetto è massimo.

### Le extratensioni alla risonanza

Alla frequenza di risonanza, essendo le reattanze uguali ed opposte, tutta la tensione di eccitazione  $\overline{V}$  è applicata ai capi della sola parte resistiva, quindi l'ampiezza della corrente, dipende dalla sola resistenza, e vale:

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{R}$$

La corrente, però, deve attraversare anche i due componenti reattivi, sui quali si sviluppano, rispettivamente, le *d.d.p.*  $\bar{V}_L$  e  $\bar{V}_C$  seguenti:

$$\bar{V}_L = \bar{X}_L \cdot \bar{I} = j \frac{X_L}{R} \cdot \bar{V}$$

$$\bar{V}_C = \bar{X}_C \cdot \bar{I} = -j \frac{X_C}{R} \cdot \bar{V}$$

Essendo, alla risonanza, le due reattanze uguali in modulo ed opposte in segno, anche le due *d.d.p.* risultano con ampiezze uguali, ma con fasi opposte, per cui nella somma il loro contributo risulta complessivamente zero.

Il valore della loro ampiezza, *direttamente proporzionale* all'ampiezza della tensione in entrata, dipende dal rapporto tra la componente reattiva e la componente resistiva del circuito. Ora, se la resistenza è elevata, maggiore della componente reattiva, allora il loro valore si mantiene inferiore a  $\bar{V}$ . Se, invece, il valore della resistenza è basso, inferiore al valore delle reattanze, allora il le due *d.d.p.* che si sviluppano sui componenti reattivi assumono ampiezze maggiori di  $\bar{V}$ . Per questo motivo esse sono denominate: *extratensioni alla risonanza*.

### • La risonanza nel circuito risonante parallelo

Nel circuito risonante parallelo, la *reattanza totale* è data dal parallelo delle due reattanze:

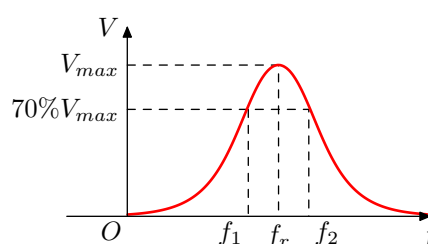
$$\bar{X}_T = \frac{jX_L \cdot (-jX_C)}{jX_L - jX_C} = \frac{X_L \cdot X_C}{j(X_L - X_C)}$$

Alla frequenza di risonanza, il denominatore si annulla, pertanto, la reattanza totale diventa infinita. Interpretiamo questo fatto dicendo che il gruppo costituito dai due elementi reattivi si comporta nel suo insieme, alla risonanza, come se fosse un isolante perfetto o anche un interruttore aperto. Anche in questo caso, allora, i due elementi reattivi riescono a mascherarsi reciprocamente, rendendosi, nel parallelo, invisibili al generatore.

Se, allora, eccitiamo il circuito in corrente, fornendo una corrente avente proprio la frequenza di risonanza, esso risponde con una *d.d.p.* la cui ampiezza dipende ancora solo dalla resistenza, ed è, quindi, in *fase* con la corrente applicata. Se la resistenza è di *alto* valore allora la *d.d.p.* può essere molto grande.

Viceversa, al di fuori della zona di risonanza, la *d.d.p.* risulta molto piccola e tendente a zero, in quanto: o è chiusa la bobina (basse frequenze), o è chiuso il condensatore (alte frequenze).

Otteniamo pertanto, per la risposta, cioè per la *d.d.p.* il picco di figura, il quale si manifesta ancora per una ristretta gamma di frequenze, molto vicine al valore di risonanza, dove l'effetto è massimo.





### L'extracorrente alla risonanza

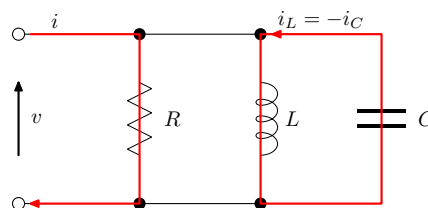
Alla frequenza di risonanza, essendo le reattanze uguali ed opposte, tutta la corrente di eccitazione  $\bar{I}$  attraverso la sola parte resistiva, quindi l'ampiezza della tensione, dipende dalla sola resistenza, e vale:

$$\bar{V} = R \cdot \bar{I}$$

Ma essendo i due componenti reattivi connessi in parallelo alla resistenza, essi sono vincolati ad avere ai loro capi la stessa *d.d.p.* della  $R$ . Allora essi risultano attraversati, rispettivamente, dalle *correnti*  $\bar{I}_L$  e  $\bar{I}_C$  seguenti:

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}}{\bar{X}_L} = -j \frac{R}{X_L} \cdot \bar{I}$$

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{V}}{\bar{X}_C} = j \frac{R}{X_C} \cdot \bar{I}$$



Essendo, alla risonanza, le due reattanze uguali in modulo ed opposte in segno, anche le due *correnti* risultano con ampiezze uguali, ma con fasi opposte, per cui nella somma il loro contributo risulta complessivamente zero. Dato che quando l'una è positiva, l'altra è negativa, le due correnti costituiscono complessivamente *una sola corrente* che percorre la maglia costituita dalla bobina e dal condensatore. Il valore della sua ampiezza, *direttamente proporzionale* all'ampiezza della corrente in entrata, dipende dal rapporto tra la componente resistiva e la componente reattiva del circuito. Ora, se la resistenza è bassa, minore della componente reattiva, allora il suo valore si mantiene inferiore ad  $I$ . Se, invece, il valore della resistenza è alto, superiore al valore delle reattanze, allora la *corrente* che scorre sui componenti reattivi, assume ampiezze maggiori di  $I$ . Per questo motivo essa viene denominata: *extracorrente alla risonanza*.

#### • La risonanza in generale

Le due situazioni sopra esposte sono generalizzabili a fenomeni risonanti di natura non elettrica. Possiamo anzi dire che praticamente tutte le strutture fisiche esistenti presentano almeno un punto critico in corrispondenza del quale vanno in risonanza: strutture edili quali ponti e palazzi, strutture meccaniche, strutture atomiche e nucleari, presentano infatti, il fenomeno della risonanza.

In tutte le strutture la risonanza si manifesta sempre nel seguente modo: *minima risposta* alla sollecitazione, ovvero strutture *ferme*, se la frequenza della sollecitazione è *lontana dalla frequenza critica*.

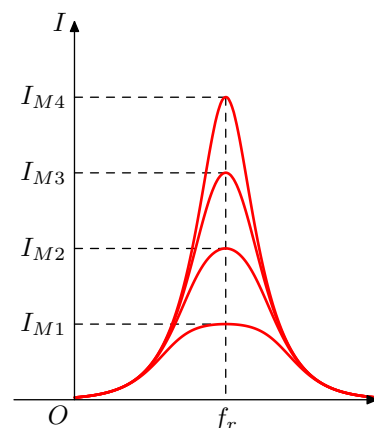
*Risposta* anche molto *elevata*, *in fase* con la sollecitazione, le strutture si *muovono*, se, invece, sono sollecitate, per un tempo sufficientemente lungo, proprio *alla frequenza di risonanza*. In alcuni casi, la risposta alla risonanza è in grado di mettere

in crisi e danneggiare la struttura stessa.

La particolare forma della risposta, richiama quella di un filtro di banda selettivo, che quindi si può costruire proprio con circuiti risonanti. Come vedremo in seguito, essi trovano, però, molte altre applicazioni, ad esempio nel campo delle *antenne*.

### 2.5.2 La qualità

Con riferimento al circuito risonante serie, quando nel circuito viene diminuito progressivamente il valore della resistenza, si osserva che *il picco di risonanza aumenta* proporzionalmente, mentre la *larghezza del picco*, valutata al 70% del valore massimo, *si restringe*. Allora, nella situazione limite in cui viene completamente azzerata la resistenza, il picco di corrente dovrebbe diventare *idealmente infinito*. Nella realtà, però, ciò non si verifica, in quanto, essendo i componenti reali, essi presentano al loro interno una componente resistiva parassita.



Più esattamente, mentre si riesce a realizzare componenti capacitivi di buona qualità, per i quali, alle frequenza di lavoro consigliate dal costruttore, la componente resistiva è praticamente irrilevante, ciò non avviene per le bobine, per le quali la componente resistiva, che non deriva solo dalla resistenza dei fili, ma tiene conto di tutte le perdite di energia a cui il componente è soggetto, non è affatto trascurabile.

Nella realizzazione dei circuiti risonanti, pertanto, mentre si può trascurare la resistenza interna del condensatore, è necessario invece, tener conto della resistenza interna della bobina.

#### La bobina reale

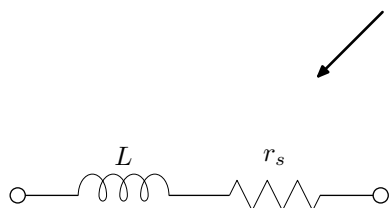
Abbiamo ora il problema di come schematizzare una bobina reale, al cui interno, cioè, sia presente una componente resistiva non trascurabile.

A tal fine, considerata una bobina reale, possiamo costruire due *modelli equivalenti*<sup>14</sup> della stessa:

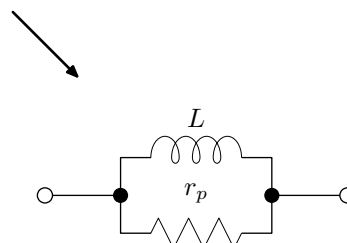
<sup>14</sup>I due modelli, con lo stesso valore per  $L$ , sono effettivamente corretti ed equivalenti, se, come si suppone implicitamente, la bobina è di buona qualità. Infatti, in questo caso, l'induttanza equivalente serie e l'induttanza equivalente parallelo coincidono. Se, invece, la bobina è scadente, allora anche i valori di induttanza equivalente  $L_s$  ed  $L_p$ , non sono uguali ed i modelli vanno modificati, introducendo due valori distinti anche per l'induttanza.



bobina reale



modello equivalente serie



modello equivalente parallelo

Nel primo modello, che chiameremo *modello equivalente serie*, la resistenza equivalente interna è connessa in *serie* alla bobina.

Useremo questo modello quando utilizzeremo la bobina per realizzare un circuito risonante serie.

Secondo questo modello la bobina è tanto più *buona*, quanto più la *resistenza equivalente serie*,  $r_s$ , è *piccola*, rispetto alla reattanza.

Nel secondo modello, che chiameremo *modello equivalente parallelo*, la resistenza equivalente interna è connessa in *parallelo* alla bobina.

Useremo questo modello quando utilizzeremo la bobina per realizzare un circuito risonante parallelo.

Secondo questo modello la bobina è tanto più *buona*, quanto più la *resistenza equivalente parallelo*,  $r_p$ , è *grande*, rispetto alla reattanza.

Osserviamo, intanto, che le due resistenze equivalenti, nei due modelli, non sono affatto uguali, avendo detto che  $r_s$  è piccola, mentre  $r_p$  è grande.

Per questa ragione si conviene di definire la *qualità* in riferimento, anzichè alla resistenza interna, alla potenza, la quale è una grandezza indipendente dalla connessione. Infatti, per avere *elevata qualità*, indipendentemente dalla connessione, la potenza deve essere *piccola sulla resistenza interna* (proporzionalità inversa), e *grande sulla bobina* (proporzionalità diretta).

**Definizione 7.** Si definisce qualità di una bobina reale, e la si indica con,  $Q$ , il rapporto tra la potenza reattiva della componente induttiva, e la potenza attiva, dissipata sulla sua parte resistiva.

$$Q = \frac{P_L}{P_r}$$

Esplicitiamo la qualità nei due modelli equivalenti, ricordando che la potenza è data da:  $P = V \cdot I$ . Dunque:

$$Q = \frac{P_L}{P_r} = \frac{V_L \cdot I_L}{V_r \cdot I_r}$$

- *Modello equivalente serie:*

Nella serie abbiamo la stessa corrente, dunque  $I_L = I_r$ , allora la corrente si semplifica e, per la legge di Ohm, otteniamo:

$$Q = \frac{V_L}{V_r} = \frac{X_L \cdot I_L}{r_s \cdot I_r} = \frac{\omega L}{r_s}$$

Osserviamo che effettivamente qualità elevata significa resistenza equivalente serie bassa.

- *Modello equivalente parallelo:*

Nel parallelo abbiamo la stessa *d.d.p.*, dunque  $V_L = V_r$ , allora si semplificano le tensioni e, per la legge di Ohm, otteniamo:

$$Q = \frac{I_L}{I_r} = \frac{V_L}{X_L} \cdot \frac{r_p}{V_r} = \frac{r_p}{\omega L}$$

Osserviamo che nel parallelo qualità elevata significa resistenza equivalente parallelo elevata. Possiamo trovare un legame tra le due resistenze equivalenti semplicemente confrontando le due espressioni:

$$\frac{\omega L}{r_s} = \frac{r_p}{\omega L}$$

Otteniamo:

$$r_s \cdot r_p = (\omega L)^2$$

Il valore della reattanza induttiva è media geometrica tra i valori delle resistenze equivalenti serie e parallelo. Il legame tra le due resistenze viene di solito espresso in funzione dello stesso fattore di qualità, dividendo le due espressioni per  $r_s^2$ :

$$r_p = \frac{(\omega L)^2}{r_s^2} \cdot r_s = Q^2 \cdot r_s$$

In una bobina reale buona il valore di  $Q$  è considerato elevato quando è di alcune decine, 30 o 40 e risulta molto difficile realizzare bobine con valori di  $Q$  ancora più elevati.

ci sono, però, componenti, quali i *quarzi*, che, pur non essendo bobine, si comportano a certe frequenze come le bobine, con una qualità notevolmente superiore. Per questa ragione essi sono utilizzati per costruire segnali molto stabili in frequenza, come serve negli orologi. Si possono ottenere qualità ancora superiori ricorrendo a dispositivi che risuonano con il campo magnetico anziché con il campo elettrico. Sono esempi le strutture atomiche e nucleari, utilizzate rispettivamente negli orologi atomici e nella risonanza magnetica nucleare.

### Il quarzo

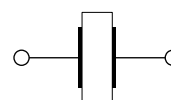
Il quarzo è un componente realizzato con un cristallo di *biossido di silicio* tagliato in una lamina sottile, seguendo i piani di cristallizzazione dello stesso.

Sulle due superfici del cristallo sono depositati i contatti metallici che ne costituiscono i terminali.

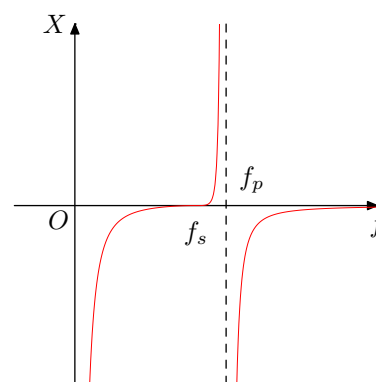
Essendo il quarzo un isolante molto buono, esso si dovrebbe comportare come un condensatore, e di fatto così avviene a quasi tutte le frequenze. Riportando in un grafico, nella parte negativa l'andamento della reattanza capacitiva del condensatore e nella parte positiva la reattanza induttiva, si osserva che alle basse ed alle altissime frequenze la reattanza del quarzo corrisponde a quella del condensatore, ma in una gamma limitata di frequenze, dal valore  $f_s$  fino ad un valore caratteristico, denominato  $f_p$ , vi si discosta bruscamente, prima annullandosi e poi diventando improvvisamente positiva. Oltre il valore di  $f_p$  la reattanza ridiviene capacitiva. Facendo operare il quarzo a quella frequenza, esso si comporta come una bobina, potendo presentare valori di *qualità* molto elevati.



da wikipedia



simbolo elettrico



### La qualità del circuito risonante

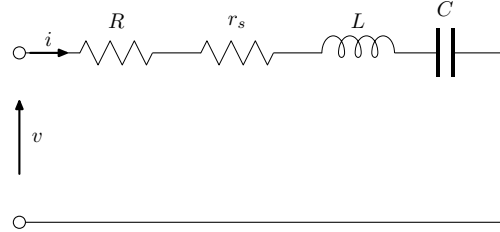
Quando una bobina reale viene inserita in un circuito risonante serie o parallelo, useremo, per schematizzarla, rispettivamente il modello equivalente serie o parallelo.

### Risonante serie

Nel circuito risonante serie la resistenza equivalente della bobina è  $r_s$ , la quale si trova in serie con la  $R$ , dando luogo alla resistenza totale :

$$R_t = r_s + R$$

Osserviamo che è come se avessimo inserito nel circuito risonante una bobina con resistenza interna  $R_t$ .



Ciò suggerisce, in analogia a quanto detto per la bobina, di definire la qualità,  $Q$ , del circuito risonante mediante il valore che il seguente rapporto ha alla risonanza:

$$Q = \frac{\omega L}{R_t} = \frac{\omega L}{R + r_s}$$

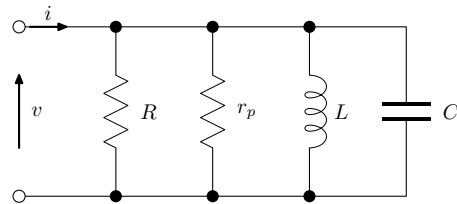
In questo modo, per  $R$  molto grande, la qualità è pessima, mentre quando  $R$  si annulla essa è massima e diventa uguale alla  $Q_b$  della bobina.

### Risonante parallelo

Nel circuito risonante parallelo la resistenza equivalente della bobina è  $r_p$ , la quale si trova in parallelo con la  $R$ , dando luogo alla resistenza totale :

$$R_t = r_s // R = \frac{r_s \cdot R}{r_s + R}$$

Osserviamo che, anche in questo caso, è come se avessimo inserito nel circuito risonante una bobina con resistenza interna  $R_t$ .



Definiamo, allora, la qualità,  $Q$ , del circuito risonante mediante il valore che il seguente rapporto ha alla risonanza:

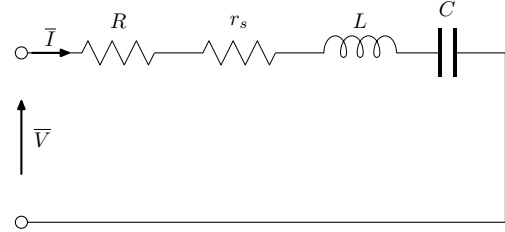
$$Q = \frac{R_t}{\omega L} = \frac{\frac{r_s \cdot R}{r_s + R}}{\omega L}$$

In questo modo, per  $R$  molto piccola, la qualità è pessima, mentre quando  $R$  non viene inserita, essa è massima e diventa uguale alla  $Q_b$  della bobina.

### 2.5.3 Circuito risonante serie - analisi simbolica

In questo paragrafo ci proponiamo di determinare, con calcolo simbolico, l'espressione della risposta in frequenza del circuito risonante serie.

A tale scopo, riconsideriamo il circuito risonante serie, nel quale la bobina è reale ed ha resistenza interna  $r_s$  ed applichiamo in entrata l'eccitazione simbolica  $\bar{V}$ .



L'impedenza totale è:

$$\bar{Z} = R + r_s + jX_L - jX_C = R_t + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

Allora la corrente che attraversa la rete è:

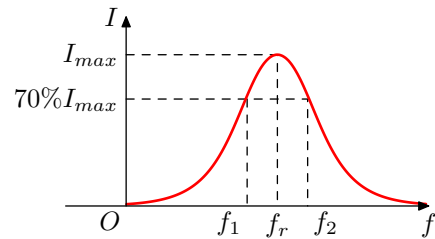
$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{V}}{R_t + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

In modulo, essa sarà:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R_t^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Mediante lo studio di funzione si mostra facilmente che l'andamento di  $I$  è quello di figura, con picco massimo alla risonanza:

$$I_{max} = \frac{V}{R_t} = \frac{V}{R + r_s}$$



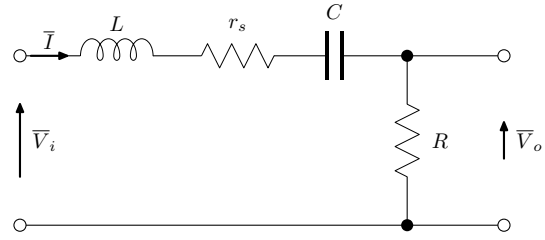
Lontano, invece, dalla risonanza la corrente si annulla.

Si dimostra che la larghezza del picco di risonanza,  $B$ , valutata al 70% del valore massimo, è in proporzione inversa con la qualità del circuito, avendosi:

$$B = f_2 - f_1 = \frac{f_r}{Q}$$

### Il filtro passa banda con il circuito risonante serie

Il filtro passa banda si ottiene, nel circuito risonante serie, prelevando l'uscita ai capi della resistenza, come in figura. Nello schema si è supposto che la bobina sia reale ed abbia resistenza interna  $r_s$ .



Infatti la tensione di uscita,  $\bar{V}_o$ , risulta in proporzione con la corrente:

$$\bar{V}_o = R \cdot \bar{I}$$

e quindi, al variare della frequenza, presenta lo stesso andamento con il picco di risonanza. La frequenza di centro banda corrisponde, allora, proprio alla frequenza di risonanza.

Ricaviamo di seguito la funzione di trasferimento:

$$\bar{G}(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} = \frac{R \cdot \bar{I}}{\bar{Z} \cdot \bar{I}} = \frac{R}{R_t + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

Facendo il modulo, ricaviamo l'attenuazione del filtro:

$$A = \frac{R}{\sqrt{R_t^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

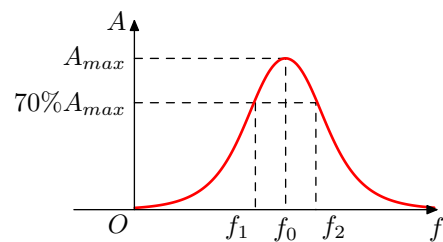
L'andamento dell'attenuazione corrisponde a quello della corrente, massimo alla risonanza, cioè alla frequenza di centro banda:

$$A_{max} = \frac{R}{R_t} = \frac{R}{R + r_s}$$

e nullo lontano dalla risonanza.

La larghezza di banda,  $B$ , valutata al 70% del valore massimo, è data da:

$$B = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q}$$





**Esempio 1**

Con una bobina reale, avente  $L$  di  $2mH$ , e qualità pari a 18, realizzare un filtro passa banda con risonante serie avente frequenza di centro banda di  $35kHz$  e larghezza di banda di  $10kHz$ .

- **svolgimento**

Con riferimento allo schema del passa banda con risonante serie, identifichiamo, intanto, la frequenza di centro banda con la frequenza di risonanza.

Partendo dall'espressione della frequenza di risonanza:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

la esplicitiamo rispetto a  $C$  e dimensioniamo il condensatore. Otteniamo:

$$C = \frac{1}{(2\pi f_r)^2 \cdot L} = \frac{1}{(6,28 \cdot 35 \cdot 10^3)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 10nF$$

La resitenza determina la larghezza di banda attraverso il fattore di qualità del circuito. Determiniamo quindi, nell'ordine, il fattore di qualità e dalla sua espressione la resistenza totale del circuito.

Fattore di qualità:

$$Q = \frac{f_0}{B} = \frac{35 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3} = 3,5$$

Resistenza totale:

Sapendo che essa è legata alla qualità del circuito dalla relazione seguente:

$$Q = \frac{\omega L}{R_t}$$

ricaviamo:

$$R_t = \frac{\omega L}{Q} = \frac{6,28 \cdot 35 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{3,5} = 125,6\Omega$$

Essendo la bobina reale, dalla resistenza totale è necessario togliere la resistenza interna della bobina. Abbiamo:

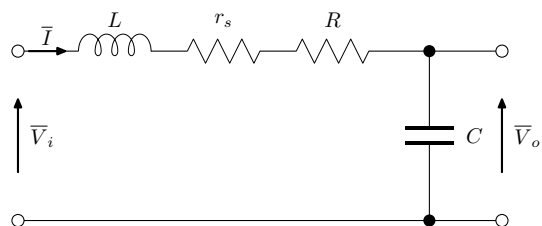
$$R_s = \frac{\omega L}{Q_s} = \frac{6,28 \cdot 35 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{18} = 24,4\Omega$$

e quindi:

$$R = R_t - R_s = 125,6 - 24,4 \approx 100\Omega$$

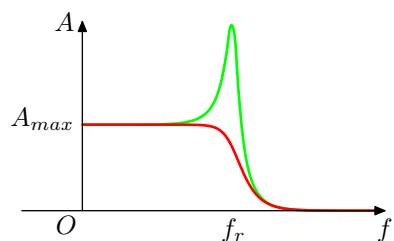
### Il filtro passa basso con il circuito risonante serie

Prelevando, invece, l'uscita ai capi del condensatore, come in figura, è possibile ottenere un filtro passa basso.



Il circuito sfrutta gli effetti sia del condensatore che della bobina, con un effetto complessivo doppio, pertanto il filtro è del secondo ordine ed ha una transizione dalla banda passante a quella oscura molto più ripida.

Alle basse frequenze il condensatore è aperto, mentre la bobina equivale ad un interruttore chiuso e quindi il segnale passa, mentre alle alte frequenze, dove il condensatore va in corto, il segnale non passa. Alla frequenza di risonanza, invece, sul condensatore si sviluppa un'extratensione il cui valore è legato al fattore di qualità del circuito.

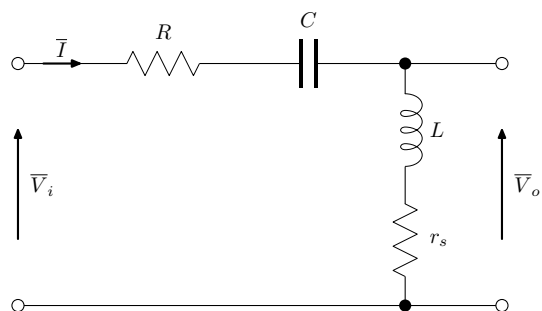


L'extratensione, può dare origine ad un picco nella risposta in frequenza (*tratto della curva in verde*), che può mascherare il comportamento da passa basso, facendo, invece, operare il circuito da passa banda. Per evitare tale comportamento bisogna che il fattore di qualità sia molto basso:  $Q \leq 1$ .

Di solito per abbassare la qualità si utilizzano le resistenze della sorgente e del carico del circuito, pertanto questi tipi di filtri sono dimensionati a carico ed operano da *adattatori di impedenza* tra sorgente e carico.

### Il filtro passa alto con il circuito risonante serie

Scambiando condensatore e bobina, ovvero prelevando l'uscita ai capi della bobina, come in figura, è possibile ottenere un filtro passa alto.



Anche questo circuito sfrutta gli effetti sia del condensatore che della bobina e

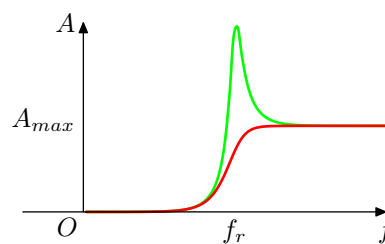
pertanto è un filtro del secondo ordine.

Infatti, alle basse frequenze il condensatore è aperto, mentre la bobina equivale ad un interruttore chiuso e quindi il segnale non passa, mentre alle alte frequenze, dove il condensatore va in corto e la bobina si apre, il segnale passa. Alla frequenza di risonanza, si sviluppa sulla bobina un'extratensione, il cui valore è legato al fattore di qualità del circuito.

L'extratensione può dare origine ad un picco sulla risposta in frequenza, facendo operare il circuito da passa banda.

Per evitare tale comportamento si danno al fattore di qualità valori molto bassi:  $Q \leq 1$ .

Anche in questo caso si utilizzano direttamente le resistenze della sorgente e del carico del circuito, pertanto anche questi tipi di filtri sono dimensionati a carico ed operano da *adattatori di impedenza* tra sorgente e carico.



### Il filtro escludi banda con il circuito risonante serie

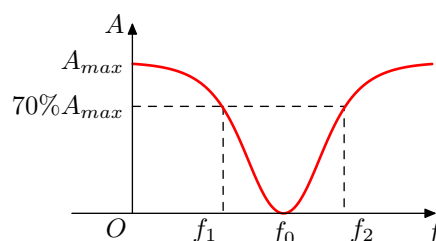
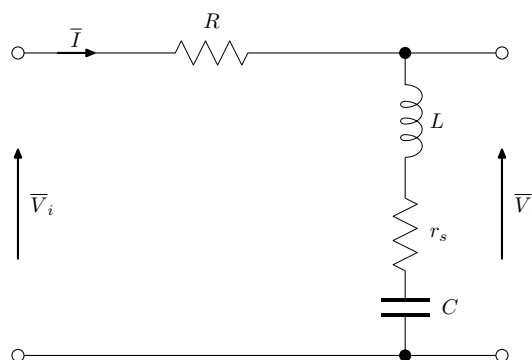
Prelevando, infine, l'uscita ai capi del gruppo  $LC$ , come in figura, è possibile ottenere un filtro escludi banda.

Ricordiamo, infatti, che il condensatore e la bobina sono aperti, rispettivamente, alle basse ed alle alte frequenze e che a tali frequenze, quindi, non passa corrente.

Pertanto, alle basse ed alle alte frequenze, l'uscita corrisponde all'entrata ed il segnale passa.

Alla frequenza di risonanza, invece, il gruppo va in corto, quindi, trascurando l'effetto della resistenza interna della bobina, il segnale non passa.

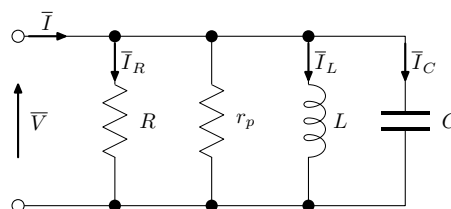
La larghezza di banda è legata alla qualità del circuito.



### 2.5.4 Circuito risonante parallelo - analisi simbolica

Determiniamo, ora, con calcolo simbolico, l'espressione della risposta in frequenza del circuito risonante parallelo.

A tale scopo, riconsideriamo il circuito risonante parallelo, nel quale la bobina è reale ed ha resistenza interna  $r_p$ . Considereremo ora come eccitazione la corrente e come risposta la tensione, pertanto applichiamo in entrata l'eccitazione simbolica  $\bar{I}$ .



L'impedenza totale è il parallelo di resistenze e reattanze:

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r_s} + \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{-jX_C} = \frac{1}{R_t} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Chiamiamo la quantità  $\frac{1}{\bar{Z}}$  ammettenza totale del circuito. Per determinare la tensione usiamo la legge di Ohm:

$$\bar{V} = \bar{Z}\bar{I} = \frac{\bar{I}}{\frac{1}{\bar{Z}}}$$

Otteniamo:

$$\bar{V} = \frac{\bar{I}}{\frac{1}{R_t} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

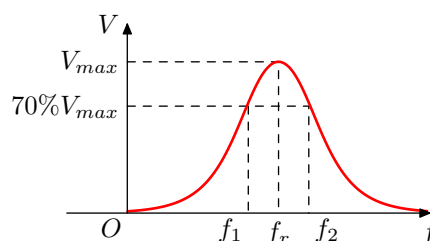
In modulo, essa sarà:

$$V = \frac{I}{\sqrt{\frac{1}{R_t^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

L'espressione è simile a quella del circuito risonante serie.

A parità di corrente, l'andamento di  $V$  è quello di figura, con picco massimo alla risonanza:

$$V_{max} = R_t \cdot I = \frac{R \cdot r_s}{R + r_s} \cdot I$$



mentre invece lontano dalla risonanza la tensione si annulla.

Si dimostra, anche per il risonante parallelo, che la larghezza del picco di risonanza,

$B$ , valutata al 70% del valore massimo, è in proporzione inversa con la qualità del circuito, avendosi:

$$B = f_2 - f_1 = \frac{f_r}{Q}$$

### Esempio 2

Con una bobina reale, avente  $L$  di  $1,8mH$ , e qualità pari a 20, realizzare un filtro di banda con risonante parallelo avente frequenza di centro banda di  $45kHz$  e larghezza di banda di  $12kHz$ .

Supponendo, alla frequenza di risonanza, che la corrente di eccitazione sia di  $10mA$ , calcolare la tensione in uscita e l'extracorrente alla risonanza.

#### • dimensionamento

Con riferimento allo schema del circuito risonante parallelo, identifichiamo, intanto, la frequenza di centro banda con la frequenza di risonanza.

Partendo dall'espressione della frequenza di risonanza:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

la esplicitiamo rispetto a  $C$  e dimensioniamo il condensatore. Otteniamo:

$$C = \frac{1}{(2\pi f_r)^2 \cdot L} = \frac{1}{(6,28 \cdot 45 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,8 \cdot 10^{-3}} = 6,95nF \approx 6,8nF$$

La resitenza determina la larghezza di banda attraverso il fattore di qualità del circuito. Determiniamo quindi, nell'ordine, il fattore di qualità e dalla sua espressione la resistenza totale del circuito.

Fattore di qualità:

$$Q = \frac{f_0}{B} = \frac{45 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^3} = 3,75$$

Resistenza totale:

Sapendo che essa, nel risonante parallelo, è legata alla qualità del circuito dalla relazione seguente:

$$Q = \frac{R_t}{\omega L}$$

ricaviamo:

$$R_t = \omega L \cdot Q = 6,28 \cdot 45 \cdot 10^3 \cdot 1,8 \cdot 10^{-3} \cdot 3,75 = 1,91k\Omega$$

Essendo la bobina reale, dalla resistenza totale è necessario togliere la resistenza interna della bobina. Abbiamo:

$$R_s = \omega L \cdot Q_s = 6,28 \cdot 45 \cdot 10^3 \cdot 1,8 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 10,2k\Omega$$

Sapendo che  $R_t$  è dato dal parallelo di  $R$  ed  $R_s$ , ricaviamo  $R$ , con la formula inversa:

$$R = \frac{R_t \cdot R_s}{R_s - R_t} = \frac{1,91 \cdot 10,2}{10,2 - 1,91} \cdot 10^3 = 2,35 k\Omega$$

• **calcolo alla risonanza**

Verifichiamo che le reattanze sono uguali in modulo ed opposte in segno e calcoliamo l'impedenza:

$$\begin{aligned}\overline{X}_C &= \frac{1}{-j\omega C} = -j \frac{1}{6,28 \cdot 45 \cdot 10^3 \cdot 6,95 \cdot 10^{-9}} = -j509\Omega \\ \overline{X}_L &= j\omega L = j6,28 \cdot 45 \cdot 10^3 \cdot 1,8 \cdot 10^{-3} = j509\Omega \\ \overline{Z} &= \overline{X}_C // \overline{X}_L // R // R_s = R // R_s = 1,91 k\Omega\end{aligned}$$

Calcoliamo il picco di tensione in uscita e le extracorrenti:

$$\begin{aligned}\overline{V} &= \overline{Z} \cdot \overline{I} = 1,91 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 19,1V \\ \overline{I}_L &= \frac{\overline{V}}{\overline{X}_L} = \frac{19,1}{j509} = -j37,5mA \\ \overline{I}_C &= \frac{\overline{V}}{\overline{X}_C} = \frac{19,1}{-j509} = j37,5mA\end{aligned}$$

Si verifica facilmente che le extracorrenti sono  $Q$  volte il valore della corrente di eccitazione.

### 2.5.5 Questionario riepilogativo

1. Chiarire il concetto di risonanza e frequenza di risonanza e ricavare l'espressione della stessa.
2. Un circuito risonante serie presenta alla risonanza extratensioni, che si chiede di rappresentare sul piano di Gauss, doppie del valore della tensione applicata. Cosa se ne deduce?
3. Cos'è il fattore di qualità? Determinare la sua espressione nel modello equivalente serie o parallelo.
4. Giustificare l'espressione del fattore di qualità nel circuito risonante serie o parallelo. Su quale parametro importante della risposta in frequenza influisce?

5. Un circuito risonante parallelo presenta alla risonanza extracorrenti, che si chiede di rappresentare sul piano di Gauss, triple rispetto alla corrente applicata in ingresso. Cosa se ne deduce?
6. Chiarire il comportamento elettrico di un gruppo risonante serie alle basse frequenze, alla frequenza di risonanza ed alle alte frequenze, giustificandolo.
7. Chiarire il comportamento elettrico di un gruppo risonante parallelo alle basse frequenze, alla frequenza di risonanza ed alle alte frequenze, giustificandolo.
8. Come si interviene per modificare la larghezza di un picco di risonanza? Fare un esempio.
9. Analizzare il circuito risonante serie ricavando l'espressione della risposta.
10. Analizzare il circuito risonante parallelo ricavando l'espressione della risposta.
11. Analizzare il circuito passa banda con circuito risonante serie, ricavando l'espressione dell'attenuazione.
12. Analizzare qualitativamente il filtro passa basso (o passa alto, o esclusi banda) realizzato con il circuito risonante serie, giustificando l'andamento della risposta in frequenza.

### 2.5.6 Esercizi

1. Un circuito risonante serie ha  $L = 20mH$ , con  $Rb = 50 \Omega$ . Si chiede di accordarlo a  $12kHz$ , facendo in modo che la larghezza del picco di risonanza sia di  $6kHz$ . Posto  $V_i = 0,5V$ , calcolare la corrente e le extratensioni alla risonanza, rappresentandole sul piano di Gauss. Tracciare il grafico della risposta in frequenza.
2. Un circuito risonante parallelo ha  $L = 1,2mH$ , con  $Rb = 100 \Omega$ . Si chiede di accordarlo a  $60kHz$  e di determinare la sua resistenza equivalente parallelo. Posto  $I = 10mA$ , calcolare la tensione e le extracorrenti alla risonanza, rappresentandole sul piano di Gauss. Tracciare il grafico della risposta in frequenza.
3. Disponendo di una bobina di  $2,2mH$  e fattore di qualità di 18, realizzare un passa banda che presenti frequenza di centro banda di  $50kHz$  e banda passante di  $8kHz$ .

# Capitolo 3

## Analisi dei segnali

### 3.1 I segnali e le loro caratteristiche

È noto dalla esperienza quanto sia importante e comune il ruolo svolto dai segnali per lo scambio delle informazioni. Sappiamo anche che le informazioni, essendo di natura impalpabile, per essere comunicate hanno bisogno di essere associate a qualcosa di fisicamente consistente, quale: il suono, la luce, ed altro, cioè ad una grandezza fisica. L'informazione viene trasmessa manipolando opportunamente, secondo un codice noto, la grandezza fisica alla quale viene associata.

Tutto ciò porta alla seguente definizione di segnale:

**Definizione 8.** *Un segnale una grandezza fisica che modifica il proprio valore nel tempo, in modo da codificare dell'informazione.*

Poiché ad ogni istante temporale il segnale prende uno ed un solo valore, esso è descritto matematicamente mediante una *funzione del tempo*. Indicando con  $S$  il segnale, scriveremo:

$$S = f(t)$$

È nota l'esistenza di una grande varietà di segnali, i quali si differenziano tra loro sia in base alla natura della grandezza fisica alla quale sono associati, che in base alla loro forma, cioè all'andamento temporale specifico.

#### Natura dei segnali

In riferimento alla natura fisica della grandezza contenente l'informazione si distinguono i *segnali elettrici*, di *tensione*, o di *corrente*, dai *segnali non elettrici*, quali:

- segnali *acustici*
- segnali *ottici*



- segnali *radio*
- segnali *magnetici*

Nelle telecomunicazioni i segnali non elettrici vengono convertiti in segnali elettrici mediante dispositivi denominati *sensori*, o *trasduttori*. Infatti:

**Definizione 9.** Sono detti sensori, o trasduttori i dispositivi che convertono una grandezza fisica non elettrica in una grandezza elettrica.

I segnali non elettrici sono invece generati a partire da segnali elettrici, mediante dispositivi denominati *attuatori*:

**Definizione 10.** Si chiamano attuatori i dispositivi che, a partire da una grandezza elettrica, generano una corrispondente grandezza fisica non elettrica.

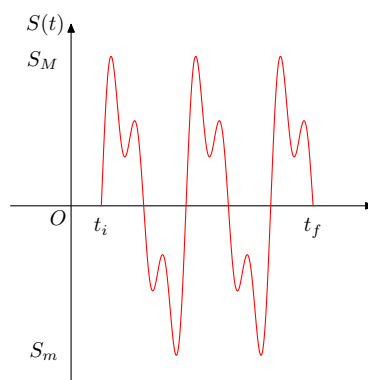
### Segnali analogici e numerici

Astraendo dalla specifica natura, che per semplicità può essere supposta di tipo elettrico, in riferimento alla forma distinguiamo intanto i *segnali analogici* dai *segnali numerici* o digitali.

I segnali analogici sono segnali che possono assumere un qualunque valore all'interno di un range prefissato di valori.

Con riferimento alla figura si osserva:

nell'intervallo nel quale il segnale viene rilevato, che va dall'istante  $t_i$  fino all'istante  $t_f$ , il segnale prende valori senza soluzione di continuità per ogni istante temporale, potendo assumere un valore qualunque, compreso nel range  $S_m \div S_M$ .

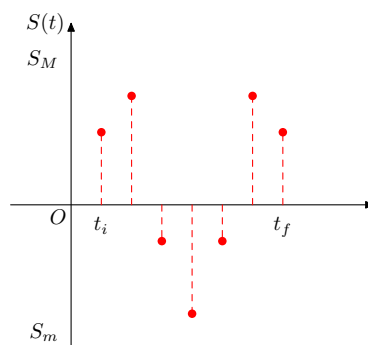


Si dice che il segnale analogico è a *tempo continuo* ed a *range continuo*.

Conseguentemente la funzione matematica,  $S = f(t)$ , che descrive il segnale è generalmente una funzione continua avente come dominio l'intervallo temporale  $t_i \div t_f$  e come codominio il range del segnale.

I segnali numerici sono segnali che possono assumere solo un insieme discreto di valori all'interno del range prefissato.

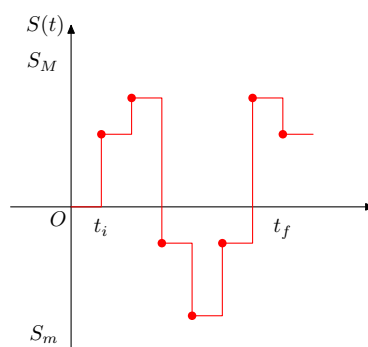
Con riferimento alla figura si osserva: nell'intervallo nel quale viene rilevato, il segnale prende valori solo ad intervalli regolari di tempo, cioè negli istanti  $t_k$ , ed i valori assunti in tali istanti stanno in una griglia discreta di punti interni al range  $S_m \div S_M$ .



Si dice che il segnale numerico è a *tempo discreto* ed a *range discreto*.

Conseguentemente la funzione matematica che descrive il segnale numerico è una *funzione discreta* del tempo.

Nelle telecomunicazioni, però, i dispositivi elettronici che sono adibiti alla generazione del segnale devono produrre un valore in uscita ad ogni istante temporale. Come soluzione di default, in ciascun intervallo temporale  $\Delta t$  compreso tra un dato istante  $t_k$  ed il successivo, il segnale numerico mantiene il valore assunto in  $t_k$  per cui nella pratica il segnale si presenta come in figura.



Per la sua forma il segnale numerico richiama l'andamento temporale di un'onda quadra.

### Segnali aperiodici, periodici e trigonometrici

Relativamente alla forma, poi, distinguiamo i segnali *aperiodici* dai segnali *periodici*.

**Definizione 11.** Si dicono aperiodici i segnali che, in ogni intervallo temporale non presentano alcun andamento di base, che si ripete ciclicamente.

**Definizione 12.** Si dicono, invece, periodici i segnali che ripetono uno stesso ciclo di base ad intervalli regolari di tempo.

Il segnale è periodico quando soddisfa alla seguente condizione matematica:

$$S(t + T) = S(t)$$

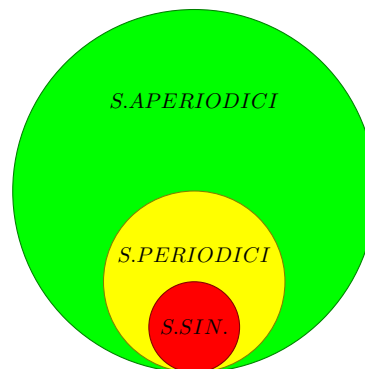
dove  $T$ , è il *periodo*: il più piccolo intervallo di tempo richiesto per descrivere un ciclo completo del segnale.

Tra i segnali periodici rivestono particolare rilevanza i *segnali trigonometrici*, cioè i segnali aventi andamento *sinusoidale* o *cosinusoidale*. Dei segnali trigonometrici si conoscono anche le relative espressioni matematiche:

$$a(t) = A \sin(\omega t) \qquad b(t) = B \cos(\omega t)$$

I diversi tipi di segnale si possono schematizzare mediante una rappresentazione per insiemi.

Si osserva dalla figura che la maggior parte dei segnali sono segnali aperiodici; che l'insieme dei segnali periodici è un sottoinsieme ristretto dell'insieme dei segnali, per il quale si conosce solo una proprietà di ripetizione ciclica della funzione; che l'insieme dei segnali trigonometrici costituisce a sua volta un sottoinsieme, ancor più ristretto, del sottoinsieme dei segnali periodici; solo per essi si conosce l'espressione matematica completa.



## 3.2 Composizione di segnali trigonometrici

Entriamo ora nello specifico dell'analisi dei segnali, osservando cosa succede quando differenti segnali sinusoidali vengono sovrapposti. L'esperienza mostra che il risultato è diametralmente diverso a seconda che le frequenze dei segnali componenti siano uguali o diverse tra loro.

### Stessa frequenza dei segnali componenti

si verifica facilmente che sovrapponendo segnali sinusoidali e/o segnali cosinusoidali aventi la stessa frequenza:

$$f(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

si ottiene ancora un segnale trigonometrico con la stessa frequenza.

In sostanza ciò si realizza, ad esempio, quando due musicisti suonano contemporaneamente la stessa nota<sup>1</sup>, ad esempio il *LA*, si ottiene ancora un *LA*. Infatti per le proprietà delle funzioni trigonometriche, risulta:

$$f(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = C \sin(\omega t + \varphi)$$

<sup>1</sup>nella ipotesi che una singola nota sia un segnale puramente sinusoidale, che prescinde dal timbro dello strumento

con

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \varphi = \arctan \frac{B}{A}$$

La prima espressione di  $f(t)$ , che utilizza le due ampiezze  $A$  e  $B$ , si chiama anche *forma cartesiana* del segnale trigonometrico, in quanto tali componenti si possono considerare come le *coordinate cartesiane* del valore simbolico rappresentativo del segnale.

La seconda espressione di  $f(t)$ , che utilizza l'ampiezza  $C$  e lo sfasamento  $\varphi$ , è detta *forma polare* del segnale trigonometrico, in quanto tali componenti si possono considerare come le *coordinate polari* del valore simbolico rappresentativo del segnale.

### Diversa frequenza dei segnali componenti

Sovrapponendo segnali trigonometrici con frequenze diverse, si ottengono, in generale, segnali *periodici non trigonometrici*.

Ciò si verifica, ad esempio, quando un musicista suona contemporaneamente due o più note con frequenze diverse, come avviene in un accordo di chitarra. Il segnale risultante non è più un segnale di tipo trigonometrico, ma rimane comunque un segnale periodico.

In particolare, nel campo della composizione dei suoni, è noto che le note della scala musicale hanno altezze che *stanno tra loro come dei numeri interi*<sup>2</sup>.

Su questa proprietà si basano i sintetizzatori dei suoni: infatti i suoni periodici, complessi, vengono sintetizzati sovrapponendo i suoni semplici emessi da uno stesso strumento.

Una analoga proprietà vale anche per la luce, come risulta dall'esperienza di Newton sulla scomposizione di un fascio di luce bianca.

## 3.3 Il teorema di Fourier

La possibilità di ottenere un qualunque segnale periodico componendo tra loro segnali trigonometrici con dosaggi opportuni, è stata infine dimostrata matematicamente dal matematico francese *J.B. Fourier* e porta il nome di *Teorema di Fourier*.

Il teorema si applica alla gran parte dei segnali periodici, ai quali sono richieste solo alcune caratteristiche generiche di *regolarità* in relazione al loro andamento temporale, quali: di essere superiormente ed inferiormente *limitati* e di essere continui, o discontinui al più in un numero limitato di punti entro il dominio. Esso afferma che:

---

<sup>2</sup>La scoperta di questa proprietà è attribuita a Pitagora, vissuto nel VII secolo avanti Cristo

**Teorema 1.** *Un qualunque segnale  $f(t)$  regolare e periodico, di periodo  $T$ , può essere espresso da una somma di infiniti termini sinusoidali e/o cosinusoidali, aventi ampiezze opportune e frequenze multiple secondo un numero intero naturale della frequenza del segnale dato.*

Si scrive:

$$f(t) = C_0 + A_1 \text{sen}(\omega t) + A_2 \text{sen}(2\omega t) + \dots \\ + B_1 \cos(\omega t) + B_2 \cos(2\omega t) + \dots$$

Compattamente:

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [A_k \text{sen}(k\omega t) + B_k \cos(k\omega t)]$$

Questa espressione è nota come la *forma cartesiana* della serie di Fourier. I coefficienti dello sviluppo in serie si determinano con le seguenti espressioni:

- $C_0$ : rappresenta il valor medio del segnale, ovvero la sua componente continua e si determina nel seguente modo:

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

- $A_k$ : rappresenta due volte il valor medio della funzione  $[f(t) \cdot \text{sen}(k\omega t)]$ <sup>3</sup>:

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \text{sen}(k\omega t) dt$$

- $B_k$ : rappresenta due volte il valor medio della funzione  $[f(t) \cdot \cos(k\omega t)]$ :

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(k\omega t) dt$$

Le componenti sinusoidali e cosinusoidali con la medesima frequenza si chiamano *armoniche*.

Una generica armonica, di ordine  $k$ , comprende le due componenti in *seno* ed in *coseno* con frequenza:  $f_k = k * f$ .

---

<sup>3</sup>Il prodotto di  $f(x)$  per una funzione seno/coseno, è spesso denominato *proiezione* della funzione  $f(x)$  lungo il seno/coseno, assimilando le funzioni trigonometriche a *vettori* tra loro perpendicolari

Con  $k = 1$  abbiamo la *prima armonica* o *armonica fondamentale*, la quale ha la stessa frequenza del segnale dato:

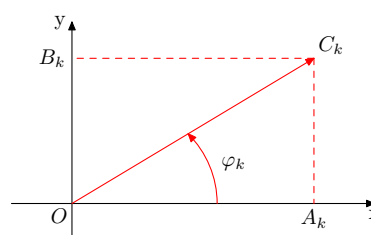
$$V_1(t) = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t)$$

Con  $k = 2$  abbiamo la seconda armonica, e così via.  
L'espressione della  $k$ -esima armonica sarà la seguente:

$$V_k(t) = A_k \sin(k\omega t) + B_k \cos(k\omega t)$$

Servendoci del piano di Gauss possiamo rappresentare simbolicamente ciascuna armonica.

Secondo le nostre convenzioni (fissiamo la rappresentazione all'istante  $t = 0$ ), il termine in seno:  $A_k \sin(k\omega t)$  dà una componente lungo l'asse delle ascisse, mentre il termine in coseno:  $B_k \cos(k\omega t)$  dà una componente lungo l'asse delle ordinate.



Il vettore rappresentativo della  $k$ -esima armonica ha modulo e fase dati dalle seguenti relazioni:

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad \varphi_k = \arctan \frac{B_k}{A_k}$$

La  $k$ -esima armonica può allora essere espressa in funzione dei parametri  $C_k$  e  $\varphi_k$  ottenendo una espressione più compatta:

$$V_k(t) = C_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

Di conseguenza anche l'espressione della serie di Fourier viene espressa nel seguente modo:

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

L'espressione è nota come la *forma polare* della serie di Fourier.

### 3.3.1 La rappresentazione spettrale

Data la funzione periodica  $f(t)$ , sviluppabile in serie di Fourier, questa risulta completamente determinata dai valori dei coefficienti  $C_k$  e  $\varphi_k$ , oltre che della componente continua  $C_0$ .

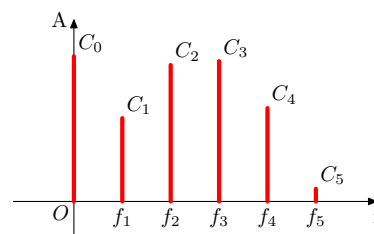
Essi rappresentano i parametri identificativi specifici di un dato segnale e solo di quello, e quindi svolgono un ruolo analogo a quello svolto dalle impronte digitali

(o per meglio dire del *DNA*) per le persone.

Per avere una visione d'insieme dei coefficienti, li si rappresenta in funzione della frequenza dell'armonica a cui si riferiscono, dando luogo ad un diagramma discreto denominato *spettro del segnale* o anche *rappresentazione spettrale* del segnale. Più precisamente, viene eseguito uno *spettro delle ampiezze*, riportando i valori di ampiezza in funzione della frequenza, ed uno *spettro delle fasi*, riportando invece, in funzione della frequenza, i valori di fase delle singole armoniche.

Per lo spettro delle ampiezze, si procede nel seguente modo:

- *componente continua* - ampiezza  $C_0$ :  
viene rappresentata con *una riga* di lunghezza pari a  $C_0$ , posizionata in corrispondenza di  $f = 0$ ; infatti la continua è considerata caso limite di una alternata con frequenza tendente a zero.



- *prima armonica* - ampiezza  $C_1$ :  
viene rappresentata con *una riga* di lunghezza pari a  $C_1$ , posizionata in corrispondenza della frequenza  $f_1 = f$ , cioè uguale alla frequenza del segnale dato.
- *k-esima armonica* - ampiezza  $C_k$ :  
viene rappresentata con *una riga* di lunghezza pari a  $C_k$ , posizionata in corrispondenza della frequenza  $f_k = k \cdot f$ , uguale a  $k$  volte la frequenza del segnale.

In modo del tutto analogo si procede per lo spettro delle fasi.

La forma a righe discrete dello spettro è una caratteristica peculiare dei segnali periodici.

**Proprietà 1.** *Tutti i segnali periodici sono caratterizzati da uno spettro discreto.*

Essa evidenzia un *legame funzionale* di tipo discreto, esistente tra le *componenti spettrali* e le corrispondenti *frequenze*, che si può esprimere mediante una *funzione discreta* della variabile  $f_k$ :

$$F : f_k \longrightarrow C_k$$

I valori assunti dai coefficienti  $C_k$ , possono crescere o decrescere all'aumentare di  $k$ , a seconda del tipo di segnale analizzato, ma, per valori di  $k$  elevati, ovvero per  $k \rightarrow +\infty$ , devono evidenziare un andamento prevalente di tipo decrescente, tendente a 0, altrimenti la serie di Fourier risulterebbe divergente.

### 3.3.2 Esempio 1

Dato il seguente segnale:

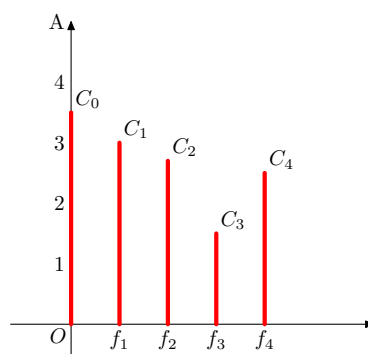
$$V(t) = 3,5 + 3\text{sen}(\omega t + \frac{\pi}{9}) + 2,7\text{sen}(2\omega t + \frac{\pi}{12}) + 1,5\text{sen}(3\omega t + \frac{\pi}{6}) + 2,5\text{sen}(4\omega t + \frac{2\pi}{9}) [V]$$

Determinare gli spettri delle ampiezze e delle fasi.

#### Svolgimento

Il segnale ha una componente continua e 4 componenti armoniche, con le seguenti ampiezze e fasi:

$$\begin{aligned} C. \text{ continua} : & C_0 = 3,5V \\ 1^a \text{ armonica} : & C_1 = 3V; \quad \varphi_1 = 20^\circ \\ 2^a \text{ armonica} : & C_2 = 2,7V; \quad \varphi_2 = -15^\circ \\ 3^a \text{ armonica} : & C_3 = 1,5V; \quad \varphi_3 = 30^\circ \\ 4^a \text{ armonica} : & C_4 = 2,5V; \quad \varphi_4 = 40^\circ \end{aligned}$$



Il diagramma spettrale delle ampiezze è, pertanto, quello di figura.

### 3.3.3 Funzioni pari e funzioni dispari

Per sviluppare un segnale periodico in serie di Fourier è necessario calcolare i coefficienti del seno e del coseno. Dato che le funzioni trigonometriche sono dotate di simmetria, il compito risulta agevolato se anche la funzione da sviluppare presenta essa stessa una simmetria, tale da comportare una corrispondente semplificazione del calcolo dei coefficienti.

Le simmetrie basilari, che consentono la semplificazione del calcolo, sono: la *simmetria pari* e la *simmetria dispari*.

- Una forma d'onda,  $f(t)$ , è *dispari* quando soddisfa la condizione:

$$f(-t) = -f(t)$$



Le forme d'onda *dispari* sono simmetriche rispetto all'origine, quindi presentano, a sinistra ed a destra dell'origine, valori uguali in modulo ed opposti in segno. Integrando, allora, una funzione periodica dispari, si ottiene:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 0$$

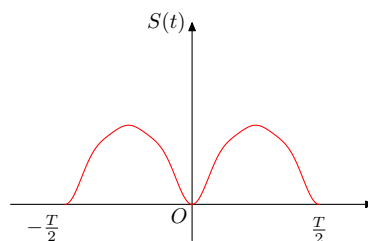
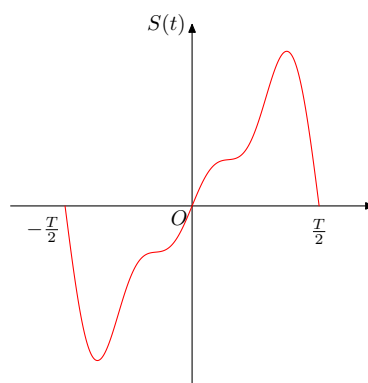
Infatti si sommano le due aree di destra e di sinistra, con risultato finale nullo.

- Una forma d'onda,  $f(t)$ , è *pari* quando soddisfa la condizione:

$$f(-t) = f(t)$$

Le forme d'onda *pari* sono simmetriche rispetto all'asse delle ordinate, quindi presentano, a sinistra ed a destra dell'origine, valori uguali. Integrando, allora, una funzione periodica pari, si ottiene:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$



Le funzioni *pari* o *dispari* godono di una serie di proprietà tra le quali:

- Sommando due o più forme d'onda *dispari/pari*, si ottiene una forma d'onda *dispari/pari*.
- Le forme d'onda *dispari* hanno componente continua nulla.
- una forma d'onda *pari* moltiplicata per una forma d'onda *pari*, dà una forma d'onda *pari*:  $(+) \cdot (+) = (+)$
- una forma d'onda *pari* moltiplicata per una forma d'onda *dispari*, dà una forma d'onda *dispari*:  $(+) \cdot (-) = (-)$
- una forma d'onda *dispari* moltiplicata per una forma d'onda *pari*, dà una forma d'onda *dispari*:  $(-) \cdot (+) = (-)$
- una forma d'onda *dispari* moltiplicata per una forma d'onda *dispari*, dà una forma d'onda *pari*:  $(-) \cdot (-) = (+)$

Queste proprietà, applicate alla serie di Fourier, semplificano molto la determinazione dei coefficienti, perché moltissime forme d'onda periodiche, tipo le onde quadre e le onde triangolari, sono *pari*, oppure *dispari*, scegliendo opportunamente l'origine degli assi.

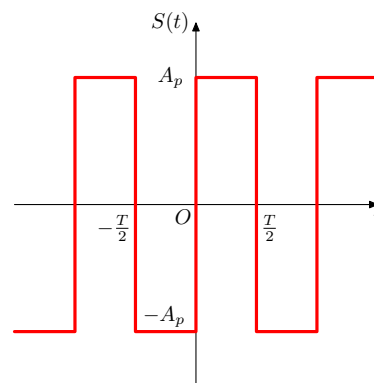
### 3.3.4 Analisi spettrale di un'onda quadra

I segnali periodici dei quali è nota l'espressione matematica sono già stati ampiamente analizzati ed i risultati dell'analisi sono stati pubblicati in apposite tabelle e sono reperibili in rete.

In questo paragrafo ci occupiamo nello specifico di un'onda quadra simmetrica, della quale supponiamo di conoscere l'ampiezza di picco,  $A_p = 1V$  ed il periodo  $T = \frac{1}{f}$ . Si tratta di un segnale di importanza notevole nelle telecomunicazioni con trasmissione numerica, dato che i segnali numerici ricordano nel loro andamento proprio un'onda quadra. Lo scopo è quello di determinarne il contenuto spettrale, ed inoltre quello di illustrare con un esempio come si procede concretamente nell'analisi e nella determinazione delle componenti.

#### *Visione grafica*

Essendo un segnale periodico è analizzabile mediante il teorema di Fourier. Risulterà uno spettro discreto. L'origine degli assi è stata scelta in modo tale che il segnale sia a valor medio nullo ed abbia una simmetria dispari.



L'onda quadra di figura si esprime analiticamente nel seguente modo:

$$f(t) = \begin{cases} +A_p & \text{per } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -A_p & \text{per } -\frac{T}{2} \leq t < 0 \end{cases}$$

Con una facile ricerca in rete si trova che:

$$\begin{aligned} C. \text{ Continua} : & C_0 = 0 \\ 1^a \text{ Armonica} : & A_1 = \frac{4}{\pi} A_p \quad B_1 = 0 \implies C_1 = A_1 = \frac{4}{\pi} A_p \\ 2^a \text{ Armonica} : & A_2 = 0 \quad B_2 = 0 \implies C_2 = 0 \\ 3^a \text{ Armonica} : & A_3 = \frac{4}{3\pi} A_p \quad B_3 = 0 \implies C_3 = A_3 = \frac{4}{3\pi} A_p \\ & \dots \end{aligned}$$

Compattamente si ha:

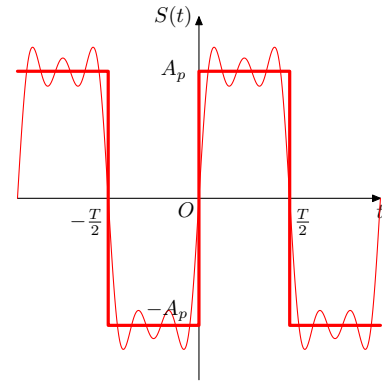
$$\begin{cases} C_k = \frac{4}{k\pi} A_p & \text{per } k \text{ dispari} \\ C_k = 0 & \text{per } k \text{ pari} \end{cases}$$

Pertanto, l'espressione in serie di Fourier dell'onda quadra è:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} A_p \text{sen}(\omega t) + \frac{4}{3\pi} A_p \text{sen}(3\omega t) + \frac{4}{5\pi} A_p \text{sen}(5\omega t) + \dots$$

Si osserva che l'onda quadra è costituita dalle sole *armoniche dispari*.

L'andamento dell'onda quadra, ricostruito a partire dalle prime tre armoniche dispari non nulle, è riportato in figura. Si nota che è presente nel segnale ricostruito un'ondulazione residua, la quale è tanto minore, quanto maggiore è il numero delle armoniche considerato.



Si giustifica facilmente il fatto che i coefficienti  $B_k$  risultano identicamente *nulli*, in quanto, avendo  $f(t)$  simmetria *dispari*, i termini:  $f(t) \cdot \cos(k\omega t)$  risultano anch'essi *dispari* e quindi i rispettivi integrali sono identicamente nulli.

Pertanto i valori delle ampiezze,  $C_k$  delle componenti armoniche dipendono solo dagli  $A_k$

D'altronde i termini:  $f(t) \cdot \text{sen}(k\omega t)$  acquistano simmetria *pari* e quindi i coefficienti  $A_k$  possono essere determinati solo sulla semionda positiva.

Calcoliamo come esempio  $A_1$ :

$$A_1 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \text{sen}(\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A_p \text{sen}(\omega t) dt = -\frac{4A_p}{T} \left| \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right|_0^{\frac{T}{2}}$$

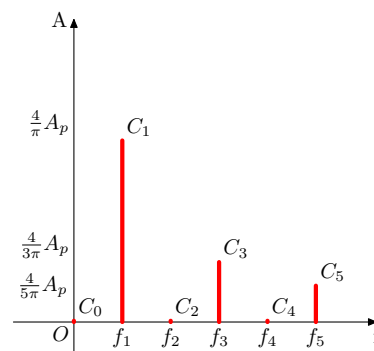
Ricordando poi che  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , si ha che  $\omega \frac{T}{2} = \pi$  e quindi:

$$A_p = -\frac{4A_p}{\left(\frac{2\pi}{T}\right) * T} (\cos(\pi) - \cos(0)) = \frac{4}{\pi} A_p$$

Analogamente si procede nel calcolo degli altri coefficienti.

Disegniamo lo spettro delle ampiezze dell'onda quadra, rappresentando le ampiezze in funzione della frequenza:

si osserva che le righe dello spettro hanno ampiezza che varia in modo *inversamente proporzionale* con la *frequenza*.



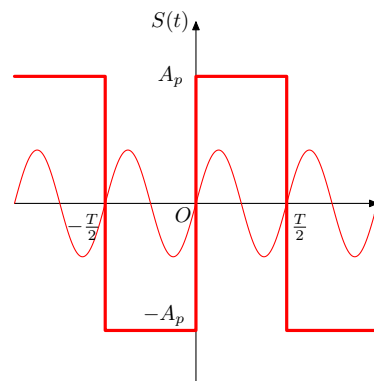
### I fronti delle onde quadre

Dall'esempio abbiamo visto che le onde quadre presentano nel loro sviluppo in serie solo le armoniche dispari, essendo nulli tutti i coefficienti delle armoniche pari: seconda armonica, quarta armonica, ecc.

Ci si domanda allora: perché le armoniche pari non danno alcun contributo all'onda quadra?

Per dare una risposta a questo interrogativo mettiamo d'apprima a confronto l'onda quadra con un'armonica pari: la 2<sup>a</sup> armonica).

Le due onde, entrambe dispari, iniziano il loro ciclo all'istante iniziale, descrivendo la semionda positiva. Ma, nel tempo corrispondente al 1° semiperiodo dell'onda quadra, la 2<sup>a</sup> armonica, che ha frequenza doppia, descrive un ciclo completo.

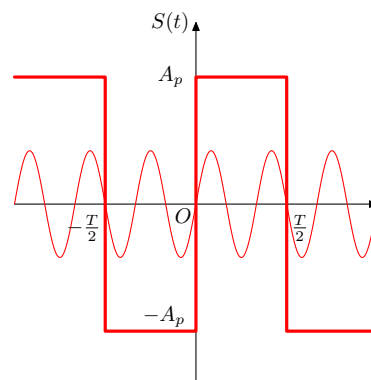


Di conseguenza, nel 2° semiperiodo, mentre l'onda quadra descrive un *fronte di discesa* e diventa negativa, la 2<sup>a</sup> armonica ripete il medesimo ciclo; essa evidenzia in particolare, in corrispondenza del *fronte di discesa* dell'onda quadra, un *andamento crescente*.

Se la 2<sup>a</sup> armonica fosse una componente dell'onda quadra, essa darebbe un contributo esattamente uguale nei due semiperiodi, e nei due fronti, ma questo è assurdo, perché l'onda quadra passa invece da livello alto a livello basso.

Lo stesso comportamento si osserva anche per le altre armoniche pari. Mettiamo ora a confronto l'onda quadra con un'armonica dispari :la 3<sup>a</sup> armonica

Ora nel 1° semiperiodo dell'onda quadra la 3<sup>a</sup> armonica descrive un ciclo e mezzo e quindi, quando l'onda quadra diventa negativa, anche il suo andamento si inverte. In corrispondenza dei fronti di salita ha andamento crescente, ed in corrispondenza dei fronti di discesa presenta andamento decrescente.



Lo stesso avviene anche per le altre armoniche dispari. In conclusione, si sottolinea che il fronte di un'onda quadra è composto dalla sovrapposizione dei tratti delle armoniche che presentano la massima variazione con pendenza concorde con il fronte. Per avere un fronte ideale, esattamente verticale, tutti i contributi delle componenti armoniche devono essere per forza sommati. Questo è anche uno dei motivi per cui i fronti delle onde quadre reali non sono totalmente verticali. Infatti i dispositivi elettronici atti a generare e a trasportare onde quadre hanno una banda passante limitata superiormente, per cui le componenti armoniche che oltrepassano tale limite vengono eliminate. Il fronte ideale, totalmente verticale è un andamento limite, quando la frequenza viene fatta tendere a  $+\infty$ .

### 3.3.5 La serie di Fourier in forma esponenziale

La serie di Fourier viene espressa in modo più compatto esprimendo le funzioni trigonometriche  $\sin x$  e  $\cos x$  con esponenziali ad esponente immaginario. Il legame tra le funzioni trigonometriche e gli esponenziali è espresso mediante le ben note formule di Eulero:

$$\begin{cases} e^{+ix} = \cos x + i \cdot \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x \end{cases}$$

Invertendo le formule di Eulero ricaviamo:

$$\begin{cases} \cos x = \frac{e^{+ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{+ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

Prendiamo allora un segnale periodico  $f(t)$  e lo sviluppiamo in serie di Fourier. Avremo:

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [A_k \sin(k\omega t) + B_k \cos(k\omega t)]$$

Poniamo:  $k\omega t = x$  e sostituiamo le espressioni del seno e del coseno:

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ A_k \frac{e^{+ix} - e^{-ix}}{2i} + B_k \frac{e^{+ix} + e^{-ix}}{2} \right]$$

Raccogliamo gli esponenziali ad esponente positivo e quelli ad esponente negativo:

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \left( \frac{B_k}{2} + \frac{A_k}{2i} \right) e^{+ix} + \left( \frac{B_k}{2} - \frac{A_k}{2i} \right) e^{-ix} \right]$$

Separiamo i due termini nella sommatoria e sistemiamo i coefficienti:

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2} (B_k - i \cdot A_k) e^{+ix} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2} (B_k + i \cdot A_k) e^{-ix}$$

Osserviamo che la seconda sommatoria, in cui l'esponenziale ha esponente negativo, è praticamente identica, a parte il segno, alla sommatoria in cui l'esponenziale ha esponente positivo. Ciò suggerisce di compattare il tutto *con un'unica sommatoria*, in cui l'indice assuma valori da  $-\infty$  a  $+\infty$ , quindi sia positivi, che negativi. Otteniamo l'espressione seguente, denominata: espressione della serie di Fourier in *forma esponenziale*:

$$f(t) = \sum_{-\infty, k}^{+\infty} F_k e^{ik\omega t}$$

Assa ingloba al suo interno: i termini esponenziali con esponente positivo, quelli con esponente negativo ed anche il termine costante. Infatti:

$$\sum_{-\infty, k}^{+\infty} F_k e^{ik\omega t} = \sum_{-\infty, k}^{-1} F_k e^{-i|k|\omega t} + F_0 e^{i0\omega t} + \sum_{k=1}^{+\infty} F_k e^{ik\omega t}$$

I valori di  $k$  da  $-\infty$  a  $-1$  forniscono i termini esponenziali con esponente negativo, ponendo:

$$F_k = \frac{1}{2} (B_{|k|} + i \cdot A_{|k|}) \quad \text{per } k < 0$$

Il termine con  $k = 0$  corrisponde al termine costante. Infatti, essendo  $e^{i0\omega t} = 1$ , basta porre, per  $k = 0$ :

$$F_0 e^{i0\omega t} = F_0 = C_0$$

Infine, i valori da  $+1$  a  $+\infty$  forniscono i termini esponenziali con esponente positivo, ponendo:

$$F_k = \frac{1}{2}(B_k - i \cdot A_k) \quad \text{per } k > 0$$

Con questa posizione e ricordando le espressioni dei coefficienti  $A_k$  e  $B_k$ , siamo in grado di ricavare l'espressione di  $F_k$ :

$$F_k = \frac{1}{2} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(k\omega t) dt - \frac{i}{2} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(k\omega t) dt$$

Semplifichiamo il 2 e raccogliamo il periodo:

$$F_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot [\cos(k\omega t) - i \cdot \sin(k\omega t)] dt$$

Usando le formule di Eulero, l'espressione dentro l'integrale diventa:

$$F_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-ik\omega t} dt$$

Anche i coefficienti  $F_k$  risultano corrispondere al *valore medio* della funzione  $f(t)$  moltiplicata per  $e^{-ik\omega t}$ . Essi sono, in generale, quantità complesse. La conoscenza degli  $F_k$  consente di determinare facilmente anche i corrispondenti valori di ampiezza  $C_k$ , che, si dimostra corrispondono al *modulo* degli  $F_k$ :

$$C_k = |F_k|$$

Generalizzando il concetto di armonica, ora la  $k$  - *esima armonica* del segnale è espressa da:

$$V_k(t) = F_k \cdot e^{ik\omega t}$$

Osserviamo che, in quest'ottica, si hanno componenti armoniche con frequenze sia positive che negative! Lo spettro viene pertanto ad avere sia righe dalla parte di  $f > 0$ , che per  $f < 0$ .

### 3.4 La trasformata di Fourier

Mediante il teorema di Fourier siamo in grado di analizzare le forma d'onda periodiche e di scomporle nelle loro componenti armoniche. Resta da esaminare il caso, del resto più diffuso, in cui la forma d'onda da analizzare sia non periodica.

Benché, a prima vista, possa sembrare una situazione totalmente diversa dalla precedente, affronteremo il problema con il proposito di estendere quanto già sappiamo per i segnali periodici, ai segnali non periodici.

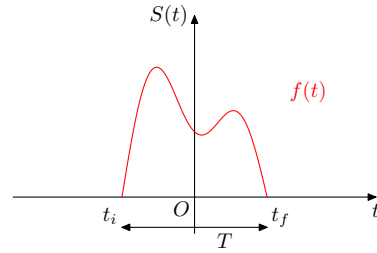
Consideriamo, allora, un *segnale aperiodico* e cominciamo ad analizzarlo per *passi* successivi:

- 1° passo: *osservazione* del segnale

Osserviamo il segnale in un prefissato intervallo temporale  $T$ .

Essendo aperiodico, il segnale non presenta in  $T$  alcun andamento ciclico ripetitivo.

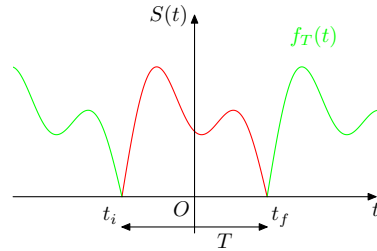
Inoltre, all'esterno di  $T$ , dove non è stato osservato, il suo andamento non è noto.



- 2° passo: *estensione* del segnale

*Estendiamo* il segnale all'esterno dell'intervallo di osservazione  $T$ .

Anche se all'esterno di  $T$  non è stato rilevato, è ragionevole che il segnale abbia un andamento non troppo diverso da quello evidenziato in  $T$ . Ai fini dell'analisi risulta utile, allora, supporre che, all'esterno di  $T$ , l'andamento del segnale sia proprio *uguale* a quello rilevato dentro  $T$ .



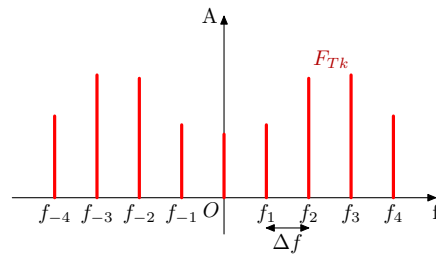
In questo modo il segnale aperiodico  $f(t)$  viene approssimato con un segnale periodico,  $f_T(t)$ , di periodo  $T$ . L'approssimazione sarà tanto migliore quanto più  $T$  sarà grande.

- 3° passo: *analisi* del segnale

Analizziamo il segnale approssimato  $f_T(t)$

Essendo il segnale  $f_T(t)$  periodico lo possiamo sviluppare in serie di Fourier, determinandone lo spettro. Useremo per l'analisi l'espressione della serie in forma esponenziale:

$$f_T(t) = \sum_{-\infty, k}^{+\infty} F_{Tk} \cdot e^{ik\omega t}$$



Otteniamo uno spettro discreto le cui righe sono distanziate tra loro della quantità:  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Esso è descritto matematicamente dai valori della funzione di variabile discreta:  $F_{Tk}(\omega_k)$  la cui espressione é:

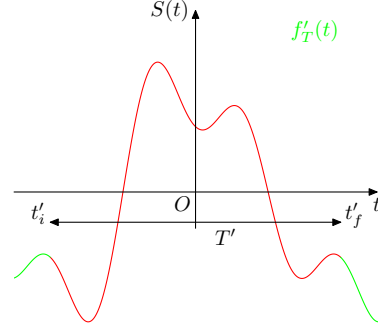
$$F_{Tk} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cdot e^{-ik\omega t} dt$$



- 4° passo: *limite per*  $T \rightarrow +\infty$

Aumentiamo l'intervallo di osservazione, iniziando, ad esempio, con il raddoppio, da  $T$  a  $T' = 2T$ .

Più si allunga l'intervallo di osservazione più migliora l'approssimazione.

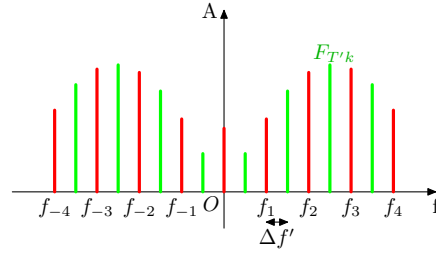


Deduciamo che possiamo riottenere il segnale aperiodico come caso *limite*, facendo tendere il *tempo di osservazione* all'*infinito*:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t)$$

Inoltre osserviamo che, aumentando  $T$ , cambia anche la distanza tra le righe spettrali, che diventano sempre più fitte. Nel caso dell'esempio:

$$\Delta\omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\Delta\omega}{2}$$



Nel limite di  $T \rightarrow +\infty$  la distanza tra le righe spettrali diventa *infinitesima*:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \Delta\omega = d\omega$$

e lo *spettro* diventa *continuo*.

Deduciamo la seguente proprietà dei segnali aperiodici:

**Proprietà 2.** *I segnali aperiodici sono caratterizzati da uno spettro continuo.*

La funzione  $F_{T_k}(\omega_k)$  che descriveva lo spettro di  $f_T(t)$  diventa la *funzione* di variabile continua:  $F_T(\omega)$ , che interpola i valori di  $F_{T_k}(\omega_k)$ . Quindi:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \omega_k = \omega$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} F_{T_k}(\omega_k) = F_T(\omega)$$

- 5° passo: *rinormalizzazione* Poiché davanti all'espressione di  $F_{T_k}$  c'è il termine:  $\frac{1}{T}$ , per evitare che tutto vada a zero, si determina nel passaggio al limite solo la quantità:

$$F_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cdot e^{-ik\omega t} dt$$

e si esprime  $F_{T_k}$  in funzione di  $F_k$ :

$$F_{T_k} = \frac{1}{T} F_k$$

Si riporta, inoltre, la sostituzione anche nella espressione della serie di Fourier, ricordando che  $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ :

$$f_T(t) = \sum_{-\infty, k}^{+\infty} \frac{1}{T} F_k \cdot e^{ik\omega t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty, k}^{+\infty} F_k \cdot e^{ik\omega t} \Delta\omega$$

Nel passaggio al limite la sommatoria in  $\Delta\omega$  diventa un integrale in  $d\omega$ .

- 6° passo: *passaggio al limite* Nel passaggio al limite si ricavano:

$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} F_k(\omega_k)$$

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t)$$

Per quanto detto in precedenza, si ottiene:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

La funzione  $F(\omega)$ , associata a  $f(t)$ , viene chiamata *trasformata di Fourier* di  $f(t)$ .

Anche se siamo partiti dalla supposizione che  $f(t)$  fosse aperiodica, questo requisito non è affatto richiesto per l'esistenza della trasformata, la quale può essere utilizzata anche per analizzare funzioni periodiche. L'unico requisito richiesto è quello della regolarità di  $f(t)$ , per far sì che gli integrali su riportati esistano.

Si richiama l'attenzione sulla forte somiglianza delle due relazioni, le quali lasciano intravedere una profonda simmetria e dualità tra il dominio del tempo ed il dominio delle frequenze.

Per estensione, la  $f(t)$ , determinata con la relazione su riportata, viene chiamata *antitrasformata* della funzione  $F(\omega)$ .

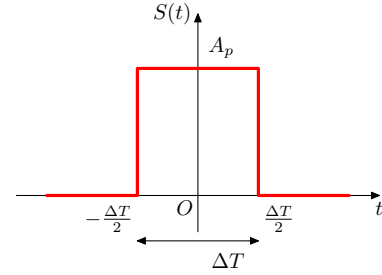
La trasformata di Fourier è lo strumento fondamentale per l'analisi dei segnali e la determinazione del loro contenuto armonico spettrale.

Invece, per la determinazione della risposta di un circuito, si preferisce utilizzare la *trasformata di Laplace*.

### 3.4.1 L'impulso rettangolare

L'*impulso rettangolare* è un segnale che assume ampiezza  $A_p$  costante e non nulla, negli istanti di tempo compresi nell'intervallo  $\Delta T$ , ed ampiezza nulla negli istanti di tempo esterni a tale intervallo.

Per far sì che il segnale abbia simmetria pari, l'origine degli assi è stata fissata esattamente a metà dell'impulso.



Associando al livello alto del segnale il valore logico 1, l'impulso rettangolare può essere immaginato come il più elementare *segnale numerico*, rappresentante una singola informazione.

La determinazione del contenuto spettrale del segnale ci permette allora di prevedere la quantità di *banda passante*, che sarà richiesta per la sua trasmissione.

Il segnale si esprime analiticamente nel seguente modo:

$$f(t) = \begin{cases} A_p & \text{per } -\frac{\Delta T}{2} \leq t \leq \frac{\Delta T}{2} \\ 0 & \text{per } t < -\frac{\Delta T}{2} \wedge t > \frac{\Delta T}{2} \end{cases}$$

Essendo il segnale non periodico, lo analizziamo con la trasformata di Fourier. Abbiamo:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Essendo  $f(t)$  nulla oltre  $\pm \frac{\Delta T}{2}$ , si ottiene:

$$F(\omega) = \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} A_p \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Ricordando le formule di Eulero, si esprime l'esponenziale con le funzioni trigonometriche:

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)$$

e sostituiamo, ottenendo:

$$F(\omega) = A_p \cdot \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} \cos(\omega t) dt + A_p \cdot \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} \sin(\omega t) dt$$

Dato che il seno è una funzione dispari il secondo integrale è nullo.

Il primo integrale, invece, dove compare il coseno, che è pari, diventa il doppio della sola parte positiva, quindi:

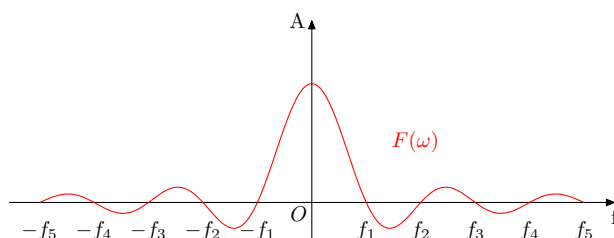
$$F(\omega) = 2 \cdot A_p \cdot \int_0^{\frac{\Delta T}{2}} \cos(\omega t) dt = 2 \cdot A_p \left[ \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^{\frac{\Delta T}{2}}$$

Pertanto si ottiene:

$$F(\omega) = 2A_p \frac{\sin(\omega \frac{\Delta T}{2})}{\omega}$$

Osserviamo che, l'andamento della funzione è del tipo  $\frac{\sin x}{x}$ :

nell'origine  $F(\omega)$  ha ampiezza massima, mentre lontano dall'origine, la funzione ha andamento di tipo sinusoidale, con ampiezze di picco che decrescono in modo inversamente proporzionale alla frequenza.



La funzione si annulla quando si annulla il seno e questo avviene per:

$$x = \omega \frac{\Delta T}{2} = 2\pi \cdot f \frac{\Delta T}{2} = k \cdot \pi$$

e quindi quando:

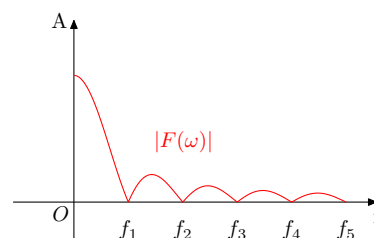
$$f = \frac{k}{\Delta T}$$

Il primo valore per cui la funzione si annulla viene denominato: *frequenza di cifra* del segnale e vale:

$$f_1 = \frac{1}{\Delta T}$$

La trasformata fornisce una visione diretta del contenuto spettrale dell'impulso rettangolare.

Tuttavia, essendo in generale la funzione complessa, per tracciare lo spettro delle ampiezze, normalmente si rappresenta, per valori *positivi* della frequenza, il *modulo* della funzione.



Dal grafico si deduce che lo spettro dell'impulso rettangolare occupa tutta la gamma di frequenze, da 0 a  $+\infty$  e quindi anche la larghezza di banda richiesta per la sua trasmissione senza distorsione è infinita.

Nella pratica, però, non viene richiesta la trasmissione senza distorsione, ma solo che dal segnale ricevuto sia possibile il riconoscimento dell'informazione. A tale scopo è sufficiente che una eventuale distorsione dell'impulso rettangolare, mantenga comunque separate le due zone, o fasce, del livello alto e del livello basso, in modo da rendere riconoscibile il valore logico, rispettivamente 1 e 0 ad essi associato.

Ciò permette di trasmettere solo una parte del contenuto spettrale, normalmente la prima parte, o parte principale, comprendente la gamma di frequenze che vanno dalla continua alla frequenza di cifra:  $0 \div f_1$ . Le altre componenti vengono eliminate, mediante un filtro passa basso, con frequenza di taglio uguale ad  $f_1$ .

Anche in questo modo si ha che:

**Proprietà 3.** *La gamma di frequenze richieste per la trasmissione del più semplice segnale numerico è inversamente proporzionale alla durata del tempo di bit.*

### 3.4.2 Quesiti ed esercizi

1. Cosa sono e come sono classificati i segnali?
2. Riporta l'enunciato del teorema di Fourier, specificando bene le ipotesi e le caratteristiche delle componenti.
3. Scrivi l'espressione della componente di  $3^a$  armonica della serie di Fourier nelle forme cartesiana e polare. Rappresenta nel piano di Gauss ed esplicita formalmente il modulo e la fase.
4. Cosa rappresenta il termine costante? Quale è la sua espressione? Quando è nullo?
5. Sviluppando un segnale periodico, con periodo di  $2ms$ , in serie di Fourier, si ricava, per i coefficienti di seconda armonica:  $A_2 = 2,8V$ ,  $B_2 = 3V$ ; rappresentare nel piano di Gauss, ricavare modulo e fase, quindi scrivere l'espressione matematica della seconda armonica.
6. Un segnale è caratterizzato dalle seguenti componenti: componente continua di  $2V$ ; prima armonica con  $8V$ ,  $4kHz$ ,  $30^\circ$ ; seconda armonica,  $6V$ ,  $45^\circ$ ; terza armonica,  $4V$ ,  $30^\circ$ , armoniche successive: *zero*. Individuare le espressioni matematiche delle varie componenti, rappresentandole nel piano di Gauss, determinando le rispettive componenti polari e cartesiane. Rappresentare in forma polare e cartesiana l'intero segnale. Tracciare lo spettro corrispondente.
7. Disegnare e analizzare un'onda quadra simmetrica di periodo  $30ms$  e  $V_{pp} = 10V$ , individuandone lo spettro.
8. Come viene trattato, in modo approssimato, il segnale aperiodico? Quale caratteristica fondamentale possiede lo spettro del segnale aperiodico, rispetto a quella di un segnale periodico? Giustifica.
9. Riporta le espressioni della trasformata e della antitrasformata di Fourier e specifica a quali segnali può essere applicata.
10. Un impulso rettangolare di  $0,1ms$ , attraversa un filtro di canale che lo priva delle componenti superiori alla frequenza di cifra. Si chiede la rappresentazione grafica del segnale e dello spettro prima e dopo il filtro e la risposta in frequenza del filtro, con giustificazione.
11. Metti a confronto gli spettri di un'onda quadra con periodo di  $2ms$  e di un impulso rettangolare con durata pari alla metà del periodo dell'onda quadra. Che cosa ne deduci?

# Capitolo 4

## Introduzione alle telecomunicazioni

### 4.1 Il sistema delle telecomunicazioni

Il sistema delle telecomunicazioni è un apparato complesso che ha la funzione di consentire il trasferimento di informazioni a distanza.

In questo capitolo faremo una analisi preliminare del sistema, mostrando come si schematizza in generale, quali apparati si sono affermati nel tempo e quali sono le tecniche utilizzate nella trasmissione dei segnali.

#### 4.1.1 Schematizzazione a blocchi del sistema

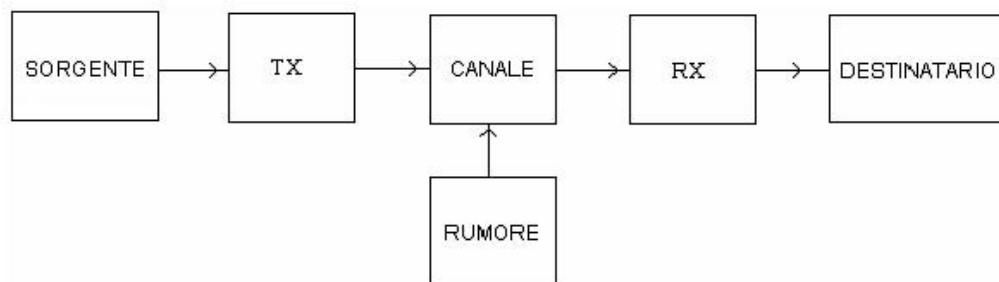


Figura 4.1: il sistema di telecomunicazioni

Comunque lo si realizzi, il sistema di comunicazione prevede i seguenti elementi fondamentali:

una stazione trasmittente, o *trasmettitore*, alla quale l'utente, rappresentato nello

schema dal blocco *sorgente*, affida ciò che deve trasmettere a distanza, il *canale di comunicazione*, il mezzo attraverso il quale la sorgente comunica con il destinatario e nel quale al messaggio stesso si sovrappone una certa quota di *rumore* ed una stazione ricevente, o *ricevitore*, dove il destinatario va a recuperare quanto è stato inviato.

Il sistema deve permettere la comunicazione a molti utenti e quindi ha necessariamente la struttura di una rete la cui realizzazione comporta la risoluzione di numerosi problemi relativi alla sua architettura tra i quali:

- L'*accesso* alla linea;
- La modalità di *trasmissione* e la sua *velocità*;
- La *correttezza* della trasmissione.

Questi fondamentali problemi sono stati risolti, scomponendoli nei diversi aspetti, originando un modello basato su più livelli, il più basso dei quali, del quale ci occupiamo, è il livello fisico.

A questo livello è utile, per comprendere le funzioni del trasmettitore, del canale e del ricevitore, pensare il canale come un condotto molto lungo, il quale può essere attraversato solo da uno specifico vettore. Da un lato del canale il trasmettitore ha

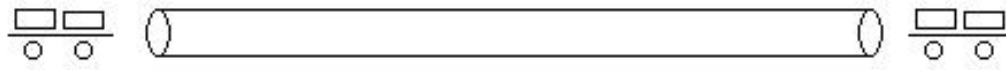


Figura 4.2: il canale come condotto

il compito di inserire il messaggio, opportunamente trattato, sul vettore; il vettore di trasportarlo all'altro capo del canale ed il ricevitore di togliere il messaggio stesso dal vettore.

Al mezzo trasmissivo si richiedono, a questo punto, le seguenti caratteristiche fondamentali:

- Massima *velocità* del vettore
- *Larghezza di banda*
- *Qualità*

È bene chiarire che nessun vettore può trasmettere un messaggio *istantaneamente*, ma sempre con un ritardo finito.



In altre parole, la velocità con cui viaggiano le informazioni è finita, il limite teorico di essa essendo la *velocità della luce nel vuoto*:

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec.}$$

I supporti fisici impiegati attualmente utilizzano un vettore che, nella sostanza, raggiunge questo limite teorico. Essi sono:

- i *cavi elettrici*: utilizzano come vettore *onde elettriche* di *dimensione* e di *corrente*. La velocità di propagazione delle due onde è circa i 2/3 della velocità della luce, cioè circa 200.000 km/sec.
- l'*etere*: utilizzano come vettore *onde elettromagnetiche*, nel campo delle *onde radio* o *microonde*, le quali si propagano alla velocità della luce nel vuoto.
- le *fibre ottiche*: utilizzano come vettore un *fascio di luce* nella banda del *visibile* o più spesso nel vicino *infrarosso*, che si propaga, ovviamente, alla velocità della luce (la luce è essa stessa un'onda elettromagnetica).

Le informazioni che la sorgente deve trasmettere costituiscono il messaggio, il quale, notoriamente, è organizzato e codificato a diversi livelli: *compattato*, *criptato*, sezionato in *pacchetti*, *incapsulato*, eccetera. Al livello più basso, cioè al livello fisico, del quale ci occupiamo, esso si presenta come un *segnale elettrico*, che, pur potendo anche essere *analogico*, attualmente è nella gran parte dei casi *digitale*. Questo segnale viene misurato attraverso la potenza media che lo caratterizza nel punto di immissione nel canale, un parametro indicato con  $S$ , dal termine inglese *Signal*.

Nel canale al segnale si sovrappone una certa quota di rumore, dove, col termine **rumore** si intende *tutto ciò che non è il segnale*.

Anche il rumore è misurato attraverso la sua potenza media, un parametro indicato con  $N$ , dal termine inglese *Noise*.

La qualità del canale, invece, è misurata attraverso il rapporto tra le potenze di segnale e di rumore, un parametro indicato con  $S/N$ , cioè il *rapporto Signal to Noise*, quantità che viene espressa in unità logaritmiche.

### 4.1.2 Il Trasmettitore

Il segnale non è adatto ad essere trasmesso direttamente attraverso il canale, per problemi legati principalmente:

- *Alla natura del segnale*: il segnale da trasmettere è un segnale elettrico, mentre il canale permette il passaggio di un proprio vettore la cui natura può essere completamente diversa.

- *Alla frequenza*: la gamma di frequenze occupate dal segnale, di solito bassa, il più delle volte non corrisponde con la gamma frequenze che sono in grado di attraversare il canale.

Il trasmettitore ha il compito di risolvere entrambi questi problemi. Il problema

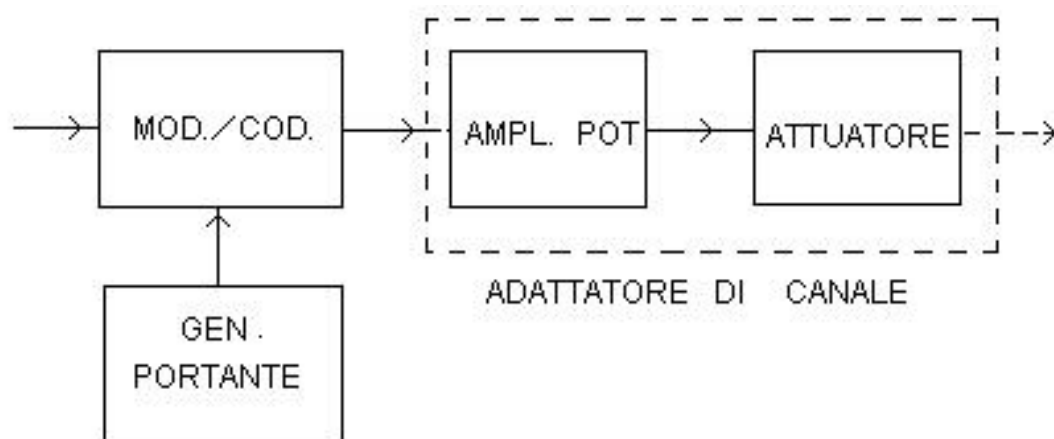


Figura 4.3: Schema a blocchi del trasmettitore

della frequenza viene risolto con il ricorso alla *modulazione*:

un primo dispositivo, il **generatore di portante**, genera un segnale, la *portante*, con un valore elevato di frequenza, corrispondente alla frequenza richiesta per la propagazione attraverso il mezzo trasmissivo utilizzato.

Essa, unitamente al segnale da trasmettere, denominato anche *segnale modulante*, viene applicata ad un secondo dispositivo, il *modulatore*, il quale inserisce il segnale modulante nella portante, modificando opportunamente uno dei parametri di quest'ultima, con l'effetto di traslare la banda del segnale da trasmettere di una quantità pari al valore di frequenza della portante stessa.

Si chiama *modulazione* il procedimento secondo il quale un segnale di alta frequenza, detto *portante*, viene modificato secondo l'andamento di un segnale di bassa frequenza, detto *modulante*.

**Definizione 13.** *Modulare significa modificare uno dei parametri della portante con la legge del segnale modulante.*

Il segnale modulato non può ancora essere trasmesso in linea in quanto non ha la natura adeguata. Questo secondo problema viene risolto dal dispositivo adattatore di canale, il quale comprende al suo interno un *attuatore*, con il compito di convertire una adeguata *potenza di segnale* elettrico, in una corrispondente *potenza di segnale* fisico, adatto a propagarsi nel mezzo trasmissivo utilizzato.

Affinchè la grandezza fisica generata sia in grado di raggiungere il ricevitore essa deve essere generata con una adeguata *intensità energentica*, pertanto si richiede all'attuatore, in linea generale, che *converta energia elettrica, in energia non elettrica*.

Per fare in modo che l'attuatore possa effettuare la conversione energetica, esso viene costantemente rifornito di energia, mediante un amplificatore di potenza. Infatti, dal punto di vista elettrico, l'attuatore è equivalente ad un carico passivo con un valore ohmico basso e pertanto richiede all'amplificatore, oltre ad una determinata *d.d.p.*, anche una, più o meno elevata, intensità di corrente, a seconda della potenza complessiva richiesta.

### 4.1.3 Il ricevitore

Dall'altra parte il ricevitore deve operare nel modo diametralmente opposto del trasmettitore, il modo da consentire la ricostruzione del segnale, quindi deve sapere tutto ciò che il trasmettitore ha fatto.

Come si vede dallo schema, il ricevitore intercetta il segnale proveniente dal mezzo

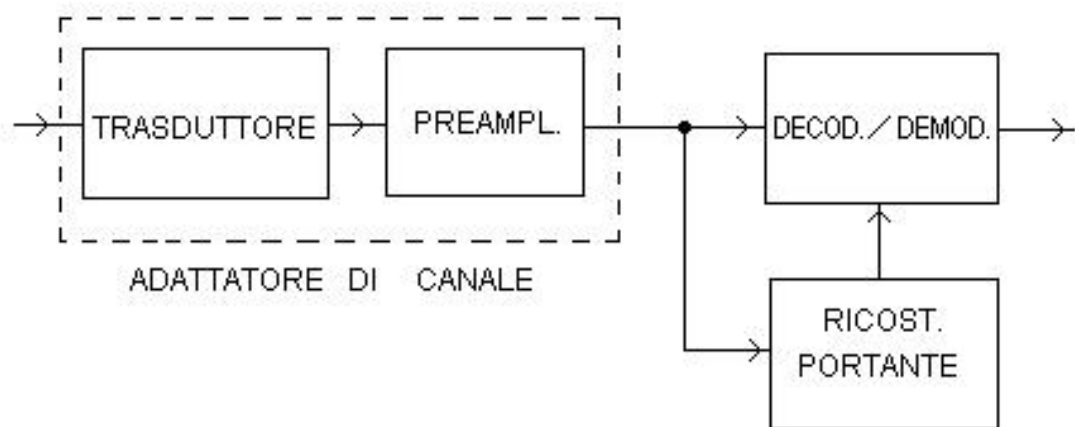


Figura 4.4: Schema a blocchi del ricevitore

trasmissivo, separandolo dal rumore di fondo e riconvertendolo in segnale elettrico, mediante il dispositivo trasduttore ed il preamplificatore selettivo. Il segnale deve poi essere demodulato ed a tale scopo il ricevitore deve sapere la esatta forma della portante generata dal trasmettitore. La rigenerazione locale della portante, però, non consente la demodulazione del segnale se la stessa non è mantenuta con lo stesso passo della portante del trasmettitore, in quanto dopo poco tempo, il disallineamento tra i due segnali renderebbe impossibile il riconoscimento delle informazioni trasmesse.

Ci troviamo di fronte ad un ulteriore, importante problema che il ricevitore deve risolvere: il problema della sincronizzazione tra gli orologi del trasmettitore e del ricevitore.

Per agevolare il compito del ricevitore il trasmettitore normalmente trasmette con il segnale anche le informazioni sulla portante, che consentono al ricevitore di sincronizzarsi.

Il ricevitore estrae queste informazioni dal segnale ricevuto e le utilizza per sincronizzare il proprio dispositivo che ricostruisce la portante.

Una trasmissione di questo tipo è detta *sincrona*. Attualmente la gran maggioranza delle trasmissioni a distanza sono trasmissioni sincrone. Se questa operazione è fatta correttamente allora il demodulatore è in grado di estrarre il segnale trasmesso dal segnale modulato e di mandarlo al decodificatore e da questo al destinatario. Gli schemi del trasmettitore e del ricevitore vanno poi adattati al particolare mezzo trasmissivo utilizzato.

#### 4.1.4 Trasmissioni analogiche e trasmissioni numeriche

Nei sistemi di comunicazione si distinguono due tipi o modalità di trasmissione: la *trasmissione analogica* e la *trasmissione numerica*.

Nelle trasmissioni analogiche la portante è un segnale alternato cosinusoidale di elevata frequenza. Anche il segnale elettrico da trasmettere, normalmente, proviene da una sorgente analogica e quindi va a *modulare* con la sua forma analogica la portante.

Nella trasmissione numerica, invece, la portante è un segnale impulsivo, cioè un'onda quadra di elevata frequenza, identificabile con il clock del codificatore.

Il segnale elettrico da trasmettere proviene, normalmente, da un terminale, quindi è un segnale digitale, il quale va a *codificare* opportunamente la portante. Il canale analogico è nato per la trasmissione dei segnali analogici.

Pur tuttavia, come vedremo, attraverso un canale analogico è possibile trasmettere anche segnali digitali, inserendoli all'interno di un vettore analogico.

Inizialmente le trasmissioni erano totalmente di tipo analogico.

Man mano che le tecniche per le telecomunicazioni si sono evolute, si è passati sempre più dalla trasmissione analogica a quella numerica.

D'altro canto il canale numerico è nato per la trasmissione dei soli segnali numerici. Vi sono, però, ancora diverse sorgenti di segnale di tipo analogico, che, per essere trasmesse attraverso il canale numerico, richiedono la conversione del segnale da analogico a digitale.

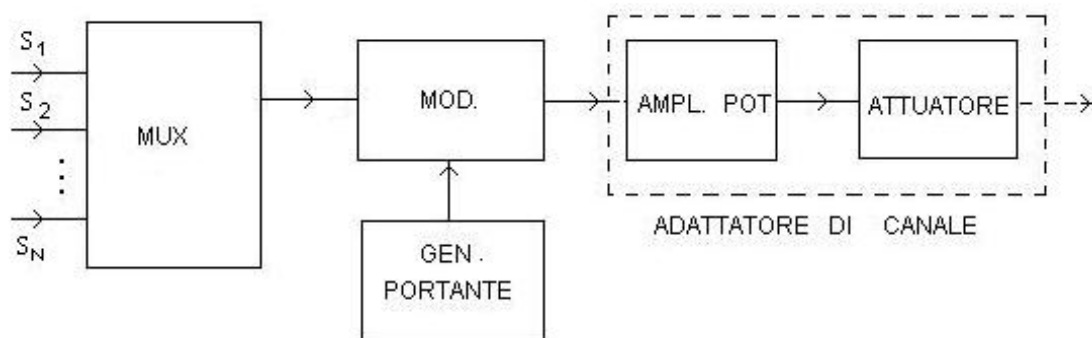
### 4.1.5 La multiplazione

Abbiamo visto le tecniche che rendono possibile la trasmissione a distanza del segnale di un dato utente.

Ma dobbiamo anche considerare che i sistemi di comunicazione a distanza, che devono soddisfare le esigenze di più utenti, sono nella realtà delle reti più o meno complesse.

Poiché non è pensabile che tutti gli utenti, che in un dato momento stanno comunicando, usino linee di comunicazione fisicamente distinte, è sorto il problema di sviluppare tecniche di trasmissione che consentano a più utenti di utilizzare uno stesso mezzo fisico, senza interferire reciprocamente.

**Definizione 14.** Si chiama **multiplazione** la tecnica che permette la condivisione fra più utenti di uno stesso mezzo fisico.

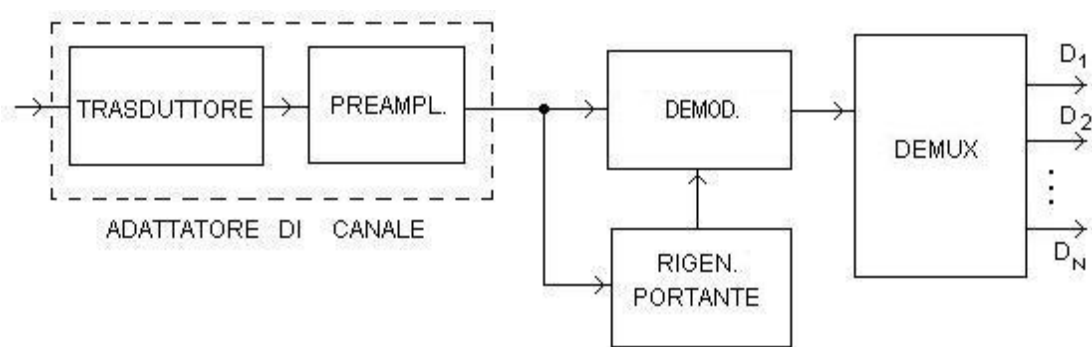


Per consentire la trasmissione contemporanea di più segnali nello stesso mezzo trasmissivo, nel trasmettitore viene inserito un ulteriore dispositivo, denominato *multiplatore*, il quale riceve in ingresso i segnali delle  $N$  sorgenti e restituisce in uscita un segnale composito, al cui interno ciascun segnale viene allocato, ma mantenendo distinte e separabili le proprie caratteristiche originarie.

Il segnale composito verrà ora, in linea di principio, modulato ed adattato al mezzo trasmissivo secondo quanto già illustrato.

Analogamente, anche nel ricevitore viene inserito un ulteriore dispositivo, il blocco *demultiplatore*: il segnale ricevuto e demodulato è il segnale composito; da esso il demultiplatore estrae il segnale sorgente e lo invia allo specifico destinatario con il quale la sorgente è collegata.

Le tecniche di multiplazione attualmente affermatesi sono la tecnica di multiplazione a *divisione di frequenza* o *FDM* (*Frequency Division Multiplexing*) e la tecnica di multiplazione a *divisione di tempo* o *TDM* (*Time Division Multiplexing*).



### Multiplicazione *FDM*

La prima tecnica di moltiplicazione ad affermarsi, l'*FDM*, si basa sul presupposto che l'occupazione di banda di un singolo utente sia molto minore della banda messa a disposizione dal mezzo trasmissivo, per cui sia possibile suddividere la banda del mezzo in più canali e traslare l'utente all'interno di uno di essi.

Lo schema di principio del sistema è riportato in figura 4.5.

Il supporto fisico che collega i nodi ha una banda passante elevata. Come già

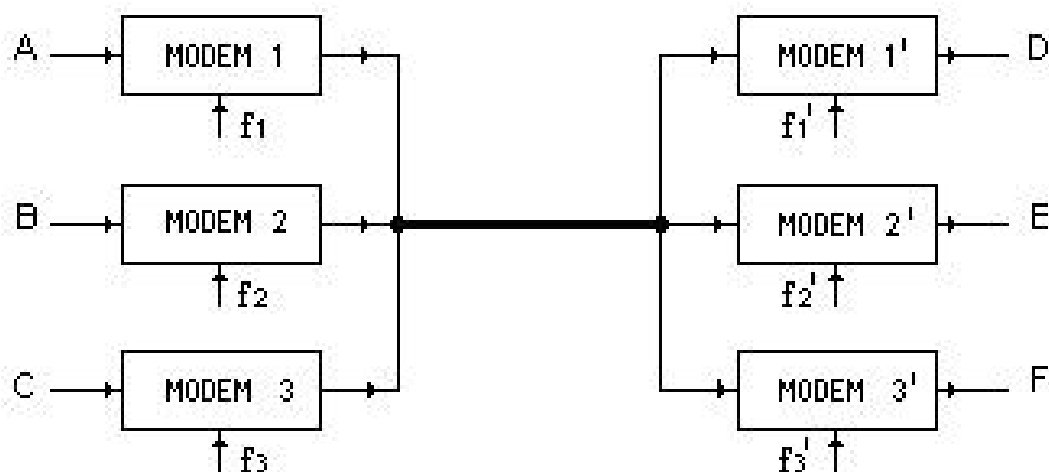


Figura 4.5: Schema a blocchi della moltiplicazione *FDM*

accennato essa viene suddivisa in *sottobande*, ognuna delle quali corrisponde ad un singolo canale della dimensione lorda sufficiente a contenere la banda del segnale utente. Ad ogni sottobanda è assegnata una relativa portante.

Il segnale di ciascun chiamante giunge al modem dove va a modulare in ampiezza, con una tecnica detta *SSB*, *Single Side Band*, la portante del canale che gli è stato

assegnato, venendo in questo modo traslato nella sottobanda relativa al canale dato. Il chiamato riceve il segnale attraverso il demodulatore.

### Multiplicazione TDM

La seconda tecnica di moltiplicazione, la *TDM*, si basa sul presupposto che il sistema adotti la trasmissione numerica. (Se il segnale dell'utente è analogico, allora deve essere digitalizzato prima di pervenire al moltiplicatore). In questo caso infatti il segnale dell'utente è costituito da un flusso di dati con una propria velocità di trasmissione. Adottando la tecnica *TDM*, questo flusso è inserito ciclicamente in un flusso di dati più ampio e veloce, coinvolgente più utenti, con una modalità di *Time Sharing* riassunta nello schema di figura 4.6.

A ciascun utente è assegnato un tempo di trasmissione finito, detto *Time Slot*,

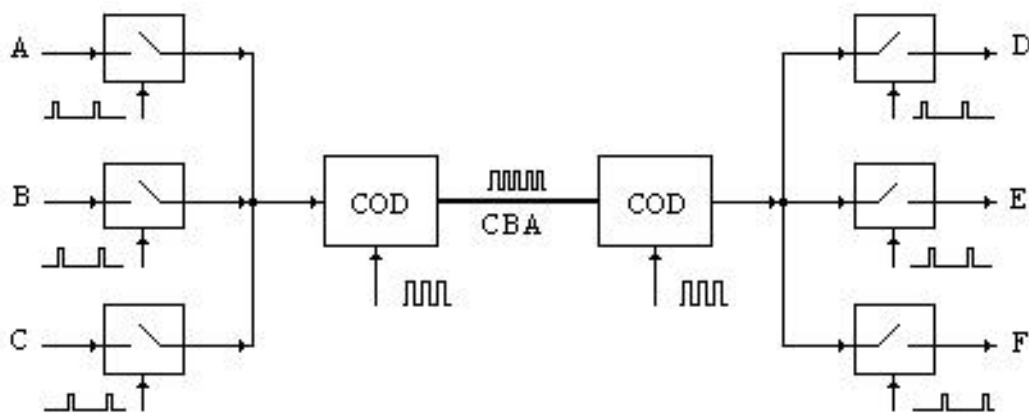


Figura 4.6: Schema a blocchi della moltiplicazione TDM

durante il quale hanno accesso al codificatore e al mezzo trasmissivo. In pratica, detto  $T$  il ciclo di trasmissione, il segnale dell'utente viene memorizzato e ritrasmesso, anziché nel tempo  $T$ , nel tempo  $TS$ . Terminato questo tempo l'accesso al codificatore passa al canale adiacente e così via, per tutti i canali coinvolti nel sistema. Solo a questo punto, cioè terminato un ciclo completo di trasmissione, l'utente torna ad accedere al mezzo nel ciclo successivo.

Indicato con  $N$  il numero degli utenti, deve essere:  $TS = \frac{T}{N}$ .

Questa tecnica impone di dare un elevato valore alla frequenza della portante impulsiva, (clock maggiore di  $N$  volte), facendo sì che il segnale numerico occupi interamente la banda del canale di trasmissione e rendendo le trasmissioni numeriche competitive con quelle analogiche. Nello schema vengono moltiplicati in successione temporale i tre canali denominati  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Dopo la moltiplicazione essi

vengono codificati, diventando parte del medesimo segnale numerico, e trasmessi. Dall'altro lato della linea il segnale numerico viene decodificato e scomposto nei tre canali che lo costituivano, i quali vengono inviati agli utenti fruitori della linea. Perché il sistema funzioni è necessario che gli interruttori che eseguono la moltiplicazione, dal lato trasmittente e da quello ricevente, siano perfettamente sincronizzati, in modo che ogni segnale venga inviato all'utente corretto, senza che vi sia interferenza con gli altri canali.



## 4.2 Evoluzione storica dei sistemi di telecomunicazione

### Telegrafia

Il bisogno di comunicare a distanza è stato avvertito come **strategico** in ogni epoca storica, tanto che pressoché tutte le civiltà antiche hanno cercato di realizzare dei sistemi per la comunicazione sulle lunghe distanze; nondimeno le telecomunicazioni propriamente dette sono alquanto recenti e si possono far risalire alla prima metà del XIX secolo, quando a seguito del cimentarsi di parecchi inventori, ed in particolare di Samuel Morse, nasce la **telegrafia** su **cavo elettrico**.

- anno 1844; realizzatore Samuel Morse: nascita della telegrafica con la prima trasmissione telegrafica su cavo elettrico tra Washington e Baltimora.

Il sistema consente la trasmissione di *messaggi testuali*, costituiti da stringhe di caratteri, codificati con il codice Morse, mediante impulsi più o meno brevi di corrente. La gamma di frequenze occupate è molto bassa. Il segnale, una volta trasdotto in segnale elettrico, è trasmesso via cavo e, per le prime tratte, in banda base. Successivamente il sistema viene organizzato con caratteristiche simili a quelle del sistema telefonico.

Con la telegrafia il cavo elettrico si afferma come mezzo trasmissivo e si diffonde incontrastato per tutto il XIX secolo. Studi teorici e perfezionamenti tecnici consentono di miglirare la realizzazione dei cavi, con i quali viene costruita una fitta rete terrestre, riuscendo anche a superare brevi tratti di mare. Verso la metà del secolo viene posto, ad una trentina di miglia di profondità, il primo cavo sottomarino di collegamento tra le due sponde dell'atlantico, permettendo la prima comunicazione telegrafica transoceanica.

Dal '900, con la nascita delle trasmissioni via etere, si sviluppa la telegrafia senza fili, che acquista particolare importanza nelle comunicazioni marittime.

La telegrafia rimane una forma di comunicazione importante per tutto il '900. Dal 1999 il suo utilizzo non è più obbligatorio nelle trasmissioni marittime. Attualmente viene ancora molto praticata a livello amatoriale.

### 4.2.1 Telefonia

La *telefonia* nasce, ad opera di G. Bell, nella seconda metà del XIX secolo con l'invenzione del telefono, riconosciuta a Meucci.

- anno 1849; realizzatore Antonio Meucci: invenzione del primo apparecchio telefonico, ma lo stesso viene brevettato *solo* nel 1871. Lo sviluppo della **telefonia** risale, invece, al 1876, ad opera di Graham Bell, il quale deposita e sviluppa, in quell'anno, un proprio brevetto.

Il segnale trasmesso con la telefonia viene chiamato: **segnale vocale** e corrisponde sostanzialmente all'insieme dei suoni coinvolti nel parlato, cioè in una tipica conversazione. Si tratta di un segnale analogico, di bassa frequenza, coinvolgente però solo un sottoinsieme delle frequenze alle quale l'orecchio umano è sensibile. Dopo studi teorici importanti, è stato stabilito che le componenti fondamentali di questo segnale, necessarie per il riconoscimento del parlato, occupano la gamma:  $300\text{ Hz} \div 3400\text{ Hz}$ , nota con il nome di *banda netta del segnale vocale*. Spesso, facendo riferimento al segnale vocale si considera come *banda lorda* la gamma:  $0 \div 4\text{ kHz}$ .

Fino alla seconda metà del '900 il segnale telefonico viene trasmesso in analogico, con multiplazione *FDM*.

Negli anni '80 inizia il processo di *digitalizzazione* del segnale telefonico, con una tecnica denominata *PCM*: il segnale vocale viene campionato a  $8\text{ kHz}$  e codificato con 8 *bit*, dando origine ad un *flusso binario* di 64 *kbps*. Il segnale viene poi multiplato con la tecnica *TDM*, comprendente, nella sua struttura di base, 32 canali. A tale scopo l'intervallo di campionamento  $T_c$ , pari a  $125\mu\text{s}$ , viene suddiviso in 32 porzioni, denominati *TIME SLOT*, di soli  $3,9\mu\text{s}$  circa, assegnati a ciascun canale, i quali trasmettono gli 8 bit di ciascun campione, all'interno del *TS* assegnato.

Il sistema richiede un notevole apporto di segnali di sincronizzazione, per la trasmissione dei quali vengono riservati i due canali finali.

### 4.2.2 Radiofonia

Sul finire del XIX secolo, con la scoperta delle onde elettromagnetiche, molti ricercatori, tra i quali N. Tesla e l'italiano Marconi, intravedono la possibilità di una applicazione delle onde radio nelle telecomunicazioni.

- anno 1893; autore Nikola Tesla: prima trasmissione di informazioni via etere. esperimento riuscito di trasmissione senza fili. Guglielmo Marconi, nel 1895, effettua a Pontecchio (BO) la sua famosa trasmissione telegrafica senza fili. Reginald Fessenden nel 1900 effettua una trasmissione radio con segnale vocale.

La trasmissioni via etere si sviluppano rapidamente dando luogo a svariate applicazioni.

In telegrafia ed in telefonia la nuova modalità di trasmissione da origine alle *connessioni punto punto* senza fili, denominate: **ponti radio**.

Ma la vera novità è la nascita, nel campo civile, delle trasmissioni radiotelevisive: la *radio*, in modulazione di ampiezza (*AM*) ed in modulazione di frequenza (*FM*) e, successivamente, la televisione.

Oltre alla radiofonia ed alla televisione, si sviluppano, poi, molti altri sistemi, tra i quali:

- i sistemi *radar*: ad esempio, per il controllo del traffico aereo
- le trasmissioni satellitari
- i sistemi amatoriali
- i sistemi radiomobili.

### La radio

La radiofonia costituisce un sistema asimmetrico: da un lato vi sono poche società le quali, utilizzando specifiche frequenze radio, trasmettono verso più utenti, con una modalità chiamata *broadcasting*. Dall'altro lato ci sono i potenziali utenti del servizio, i quali utilizzano il ricevitore radio, ovvero la radio, per ricevere il segnale della stazione preferita.

Il segnale trasmesso con la radiofonia, detto *segnale audio*, è *analogico* e consente una appropriata trasmissione del *sonoro*, non solo del parlato, ma anche, ad esempio, di canzoni e musica. Per questa ragione la gamma di frequenze riprodotte è più ampia rispetto a quella del segnale vocale. Precisamente:

- per le trasmissioni *AM* La banda del segnale audio *AM* è:  $50\text{ Hz} \div 4500\text{ Hz}$ . In trasmissione il segnale viene traslato in frequenza mediante *modulazione di ampiezza* ed occupa un canale della gamma  $520 \div 1620\text{ kHz}$ , compresa nella fascia delle *onde medie*. Ciascun canale *OM* ha una larghezza complessiva di  $9\text{ kHz}$ . Pertanto il numero dei canali disponibili è all'incirca di un centinaio.
- per le trasmissioni *FM* La banda del segnale audio *FM* è:  $50\text{ Hz} \div 15\text{ kHz}$ , più ampia in modo da consentire una maggiore fedeltà nella riproduzione sonora, possibile in quanto il segnale viene trasmesso su frequenze più elevate. In trasmissione, infatti, esso viene traslato in frequenza, mediante modulazione di frequenza, e va ad occupare un canale della gamma  $88 \div 108\text{ MHz}$ , compresa nella fascia delle *High frequency*, le *onde corte*. Ciascun canale *FM* ha una larghezza complessiva di  $200\text{ kHz}$ . Pertanto anche il numero dei canali *FM* disponibili è di un centinaio.

### La televisione

Il sistema televisivo è organizzato con modalità simili a quelle del sistema radiofonico. Il segnale televisivo viene ottenuto riprendendo con una *videocamera* una serie di immagini, i *quadri*, in sequenza temporale di 50 quadri al secondo. Ciascun quadro viene poi analizzato per righe orizzontali, in numero di 625, prima le righe pari e poi quelle dispari, con una tecnica detta a righe interlacciate, che serve, in riproduzione, a ridurre il fenomeno dello sfarfallio dell'immagine.

Attualmente, con l'alta definizione, il numero dei quadri e delle righe è stato praticamente raddoppiato.

Per ogni punto di ciascuna riga, nella televisione in  $B/N$  viene ripresa l'intensità luminosa dell'immagine, dando origine ad un segnale denominato *segnale di luminanza*.

Nella televisione a colori, invece, ciascun punto viene analizzato attraverso tre diversi filtri, rispettivamente, *Rosso*, *Verde* e *Blu*, dando luogo a tre segnali distinti, corrispondenti alle intensità luminose dei tre colori primari  $RGB$ . Da tali segnali vengono successivamente ricavati il segnale di luminanza, comprendente le informazioni sull'intensità luminosa complessiva, ed il segnale di cromaticità, comprendente le sole informazioni sulle componenti cromatiche.

Il segnale televisivo ottenuto, detto *segnale video*, è analogico ed occupa una banda di frequenze molto più ampia del segnale audio, compresa nel range:  $0 \div 5 \text{ MHz}$ . Al suo interno comprende il *segnale di luminanza* ed il *segnale di cromaticità*. Il segnale di cromaticità è inserito in coda al segnale di luminanza, con una modulazione di ampiezza su una sottoportante di  $4,43 \text{ MHz}$ . In Italia il sistema adottato è il sistema tedesco *PAL*. Altri sistemi sono: il *SECAM*, utilizzato in Francia, e l'*NTSC* utilizzato negli Stati Uniti.

Al segnale televisivo completo viene poi aggiunto anche il segnale audio, modulato in frequenza su una sottoportante di  $5,5 \text{ MHz}$ , con le medesime caratteristiche del segnale audio per *FM*.

In trasmissione il segnale televisivo viene traslato in frequenza mediante modulazione di ampiezza, su uno dei canali delle gamme *VHF* e *UHF*. Ciascun canale ha una larghezza di banda rispettivamente di  $7 \text{ MHz}$  per il *VHF* e di  $8 \text{ MHz}$  per l'*UHF*.

Il sistema radiotelevisivo è rimasto praticamente inalterato fino alla fine del '900. Attualmente, invece, il sistema è in grande trasformazione, per lo sviluppo tecnologico dei nuovi televisori a cristalli liquidi, al plasma e a *LED*, per lo sviluppo delle trasmissioni televisive via satellite, standard *DVB-S*, e via cavo, standard *DVB-C*, e infine per lo sviluppo del digitale terrestre, standard *DVB-T*. Lo standard *DVB-S*, *Digital Video Broadcasting - Terrestre* si basa sulla scelta della modulazione multiportante *COFDM* (*Coded Orthogonal Frequency Division Multiplexing*), adottata con successo anche nel sistema *DAB* (*Digital Audio Broadcasting*) per la diffusione radiofonica digitale. Questa tecnica si basa nella distribuzione del flusso dati totale tra moltissime portanti a banda stretta e quindi a bassa velocità di trasmissione, equistanziate in frequenza all'interno della banda del canale di diffusione. A ciascuna delle portanti è applicata una modulazione digitale: *QPSK*, *MQAM*.

### 4.2.3 La rete telefonica

La rete telefonica è una rete sviluppatasi a livello mondiale, a seguito della invenzione del telefono, nella seconda metà del XIX secolo.

La rete telefonica è stata strutturata in modo da soddisfare le esigenze degli utenti, minimizzando le strutture ed i relativi costi.

Dal suo punto di vista l'utente desidera:

- avere la linea a disposizione in qualsiasi momento;
- potersi collegare con ogni altro utente della rete.

Il fornitore del servizio, invece, data la vastità dell'area di allocazione della rete, vede:

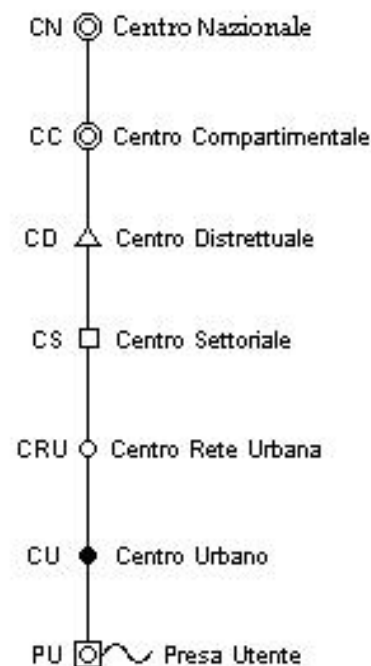
- che l'utente medio si avvale della linea per un periodo limitato di tempo;
- e che è disposto a pagare il servizio solo per il tempo in cui rimane effettivamente collegato.
- Inoltre vede che l'utente tende a collegarsi di preferenza con persone di una zona geografica ristretta, tipicamente la città di appartenenza.

La soluzione a questo apparente paradosso è stata trovata strutturando la rete su diversi livelli gerarchici.

Per la rete telefonica italiana la struttura è riportata in figura.

Al livello più basso, i singoli utenti accedono alla rete attraverso la *presa di utente* e sono collegati con la tipologia a stella al proprio *centro urbano*.

Centri urbani vicini, poi, sono collegati ad un centro gerarchico superiore, il *centro settoriale*, e così via, fino ad arrivare, passando per i *centri distrettuali*, ai *centri compartimentali*, corrispondenti alle 21 città più importanti, a loro volta facenti capo a due *centri nazionali* (Roma e Milano), con l'aggiunta di pochi collegamenti trasversali.



Il tratto di linea che collega l'utente con il primo centro urbano, denominato anche *il primo miglio*, è utilizzato solo dall'utente per conversazioni telefoniche, quando chiama, o quando è chiamato, quindi, per quanto detto, è in media poco utilizzato. Le sue caratteristiche sono state pensate in modo da soddisfare le esigenze dell'utente con il minimo costo: è un semplice *doppino telefonico*, con banda passante stabilita nel range:  $300\text{ Hz} \div 3400\text{ Hz}$ .

Il segnale dell'utente non è affatto modulato, bensì solo convertito da acustico ad elettrico per il parlante, e viceversa per l'ascoltante, ed è *trasmesso in analogico*.

I tratti, invece, che collegano i vari nodi, allo stesso livello, o con un livello superiore, servono più utenti attraverso il meccanismo della *commutazione telefonica*: La tratta comprende un numero opportuno di *canali*, corrispondente al numero di utenti che statisticamente, nella situazione di maggior traffico, richiedono la linea, tipicamente il 10% della potenzialità massima. Quando un utente richiede la linea, viene *commutato* su uno dei canali al momento liberi per il tempo corrispondente alla durata della conversazione, terminata la quale, il canale ridiviene disponibile per altri utenti.

Questo meccanismo comporta per il canale un traffico elevato, che lo rende conveniente perché distribuisce i costi tra più utenti.

Nonostante l'indubbio risparmio, il numero di canali di ciascuna tratta è egualmente elevato e tende a crescere man mano che il servizio si estende agli abitanti del territorio. Anche per questa ragione risulta economicamente conveniente realizzarla con un unico supporto, avente caratteristiche notevolmente superiori a quelle del doppino telefonico, tali da consentire di allocare al suo interno tutti i canali richiesti, adottando una delle tecniche di moltiplicazione possibili.

La rete telefonica aveva inizialmente le seguenti caratteristiche principali:

- *Organizzazione*: gerarchica a stella
- *Trasmissione*: analogica
- *Commutazione*: di circuito
- *Moltiplicazione*: a divisione di frequenza
- *Servizio*: connesso

Successivamente, man mano che le tecniche di digitalizzazione dei segnali si sono perfezionate ed affermate, la rete telefonica ha modificato alcune delle sue caratteristiche, adottando in particolare la *trasmissione numerica* e la *moltiplicazione a divisione di tempo*.

#### 4.2.4 La rete telematica

Alla fine degli anni cinquanta, non esistente ancora la rete telematica, le comunicazioni in tempo reale, civili e militari, avvenivano in analogico attraverso la rete telefonica.

Negli Stati Uniti il gestore della rete era la società AT& T, che aveva all'epoca, il monopolio delle telecomunicazioni nel territorio statunitense.

L'organizzazione del sistema di telecomunicazioni esistente venne giudicata vulnerabile, si era nel pieno della guerra fredda, dal Governo americano, in quanto un attacco nemico limitato a pochi centri nevralgici della rete l'avrebbe divisa in frammenti, incapaci di comunicare tra di loro.

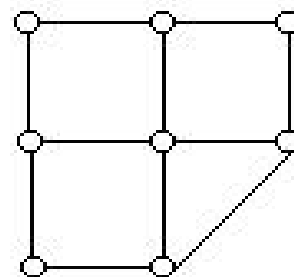
Il Dipartimento della Difesa Americano commissionò allora uno studio di fattibilità di una rete con una diversa struttura, di tipo distribuito.

Successivamente fondò una propria agenzia di ricerca, l'*ARPA*, la quale aprì una collaborazione con le Università, che portò alla realizzazione di una rete di proprietà della stessa agenzia: l'*ARPANET*.

L'*ARPANET* può essere considerata come la prima backbone della rete telematica attuale.

La rete telematica è stata strutturata in modo da soddisfare l'esigenza di garantire la comunicazione anche con un numero elevato di nodi in avaria. La struttura tipica è riportata in figura.

Come si vede la rete è costituita da un certo numero di nodi dislocati nel territorio a distanze considerevoli e collegati tra di loro in modo che ciascun nodo sia connesso con almeno due nodi vicini. Questa caratteristica garantisce, appunto, che la messa fuori uso di una sezione della rete non precluda la possibilità della comunicazione. La struttura della rete telematica assomiglia a quella del nostro sistema nervoso.



Le tratte che collegano i nodi vicini devono essere di alta qualità, perciò attualmente sono in fibra ottica.

La rete telematica ha le seguenti caratteristiche principali:

- *Organizzazione*: distribuita
- *Trasmissione*: digitale
- *Commutazione*: di pacchetto
- *Multiplexazione*: a divisione di tempo
- *Servizio*: non connesso

# Capitolo 5

## Le trasmissioni via cavo

### 5.1 Lo schema generale delle trasmissioni via cavo

Benché la trasmissione dei segnali a distanza avvenga oggi sempre più ampiamente via radio, o attraverso le fibre ottiche, le tradizionali linee elettriche su rame sono ancora ampiamente diffuse e continuano a rivestire una notevole importanza.

Lo schema a blocchi di una trasmissione via cavo è riconducibile al seguente: Nella

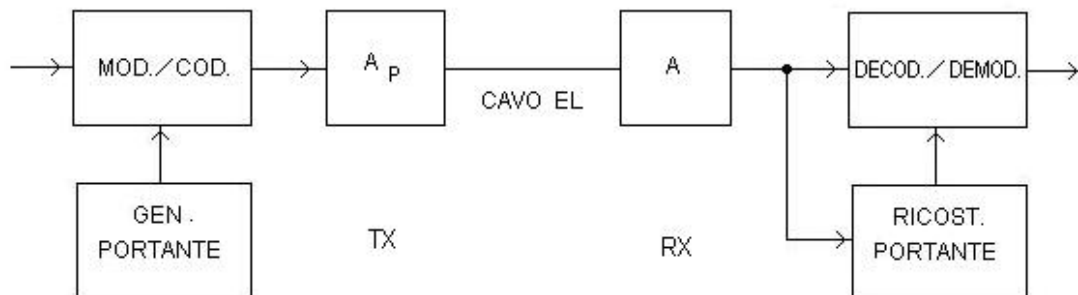


Figura 5.1: Schema a blocchi della trasmissione via cavo

trasmissione via cavo il segnale si trasmette con la sua natura di segnale elettrico, quindi non è necessario alcun elemento di conversione della natura del segnale.

Resta, invece, il problema della frequenza, in quanto, in linea generale, il segnale dovrà occupare una specifica sottobanda del canale e quindi deve essere traslato in frequenza sui valori della sottobanda assegnata.

A tale scopo nel trasmettitore è presente il dispositivo generatore della portante ed il modulatore dove il segnale da trasmettere viene inserito sulla portante ed in questo modo traslato sui valori di frequenza richiesti.



Un amplificatore di potenza, provvede poi a dare al segnale l'intensità sufficiente a propagarsi, con ampiezza apprezzabile, fino alla estremità opposta del cavo. Qui il segnale perviene al ricevitore, il quale lo preamplifica, estrae le informazioni per ricostruire la portante e lo demodula, ritraslandolo sui valori di frequenza originali.

Le trasmissioni via cavo sono ancora utilizzate più frequentemente di quanto si pensi.

Basta considerare che un qualunque apparato elettronico è costituito da tanti blocchi funzione, collegati gli uni agli altri attraverso cavi elettrici di collegamento. Anzi, ciascun blocco dell'apparato è esso stesso costituito da componenti collegati gli uni agli altri dalle piste elettriche.

### 5.1.1 Caratteristiche trasmissive

Fino ad ora non abbiamo mai dato importanza ai cavi ed alle piste di collegamento, relativamente ai quali abbiamo sempre supposto che fossero a *resistenza elettrica* nulla e che non introducessero alcuna distorsione sul segnale. Questa ipotesi è stata fatta anche per i dispositivi di misura, come il tester o l'oscilloscopio, dei cui cavetti di collegamento ci siamo ampiamente disinteressati. (Ma per l'oscilloscopio abbiamo capito che parametri parassiti, quali la capacità parassita della sonda, possono interferire nella misura, specie alle alte frequenze.) Tutte le volte che ci siamo serviti di un cavetto di collegamento abbiamo sempre supposto che il potenziale a un capo del cavetto coincidesse sempre e perfettamente con il potenziale all'altro capo e ciò indipendentemente dalla lunghezza del cavo, che era comunque supposta breve. Ci occupiamo ora, però, di un cavo elettrico per telecomunicazioni, la cui lunghezza deve essere tale da consentire la connessione tra due dispositivi anche molto lontani tra loro: da alcune decine di metri in su.

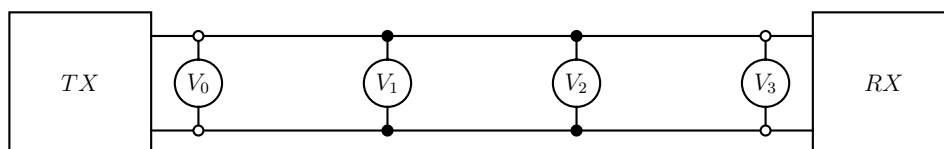


Figura 5.2: Linea elettrica bifilare

Consideriamo, cioè, un sistema di trasmissione, fig. 5.2, dove il mezzo trasmissivo è una linea elettrica bifilare, costituita da due cavi conduttori (di rame) *lunghi*.

Supponiamo che, ad un dato istante,  $t_0$ , il trasmettitore metta sotto tensione un capo della linea, per un tempo  $\Delta t$ , allo scopo di inviare una unità di informazione verso il ricevitore.

Si può ancora dire che il segnale si propaga istantaneamente e senza alcuna attenuazione all'altro capo del cavo?

Disponiamo, a distanza regolare dal trasmettitore, una serie di tester, allo scopo di osservare qualitativamente la propagazione del segnale nel cavo.

Per individuare esattamente la loro posizione, introduciamo un asse di riferimento con origine in corrispondenza del trasmettitore ed orientato verso il ricevitore.

Il primo tester,  $V_1$  lo posizioniamo all'inizio della linea, cioè nella posizione  $x_0 = 0$ ; il secondo nella posizione  $x_1$ , ecc.; l'ultimo in uscita della linea, nella posizione  $x_4 = L$ .

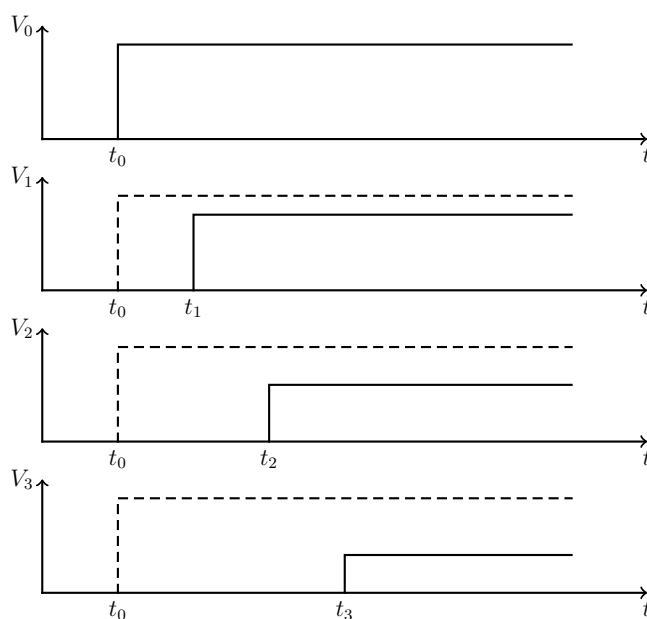


Figura 5.3: Rilievo della tensione nei diversi punti della linea

L'esperienza evidenzia, fig. 5.3, i seguenti effetti importanti:

- *ritardo di propagazione* crescente, per il fatto che la velocità di propagazione dei segnali è *finita*, sempre inferiore della velocità della luce nel vuoto.
- attenuazione della tensione man mano che ci allontaniamo dal trasmettitore; la tensione cambia da punto a punto della linea, decrescendo in modo esponenziale. Il suo andamento dipende da un parametro molto importante, denominato *coefficiente di attenuazione* ed indicato con  $\alpha$ ;
- *assorbimento di corrente*; la linea assorbe corrente in quando si comporta come un carico passivo, con un determinato valore di *impedenza*, denominato *impedenza caratteristica* della linea. Questo parametro molto importante, è indicato con  $Z_0$ .

- *riflessione*; quando il segnale immesso raggiunge il punto terminale della linea, si osserva che, se la linea non è perfettamente adattata con il ricevitore, parte del segnale, invece di essere assorbito dal ricevitore, si propaga a ritroso verso il trasmettitore! Perché la linea ed il ricevitore siano adattati è necessario che l'impedenza della linea e quella del ricevitore siano uguali. solo in questo caso non si osserva onda riflessa.

Questi effetti sono dovuti alle caratteristiche costitutive della linea. I cavi metallici presentano una serie di parametri, ad esempio la resistenza ohmica, che, se sono lunghi, non sono affatto trascurabili.

### Analisi qualitativa del potenziale

Prima di tutto cerchiamo di comprendere con quale modalità si attenua il segnale nella sua propagazione dal trasmettitore al ricevitore.

Cominciamo con il supporre che il trasmettitore immetta un dato potenziale, con ampiezza  $V_D$ , in linea.

Propagandosi verso il ricevitore ci aspettiamo che l'ampiezza del potenziale venga attenuata e quindi diminuisca progressivamente.

Se la linea è sufficientemente lunga, dopo una distanza  $\Delta x$  l'ampiezza si sarà addirittura dimezzata.

Ma allora, dopo una distanza doppia,  $2 \cdot \Delta x$ , sarà ulteriormente dimezzata, e così via.

Vediamo questo comportamento graficamente in figura 5.4.

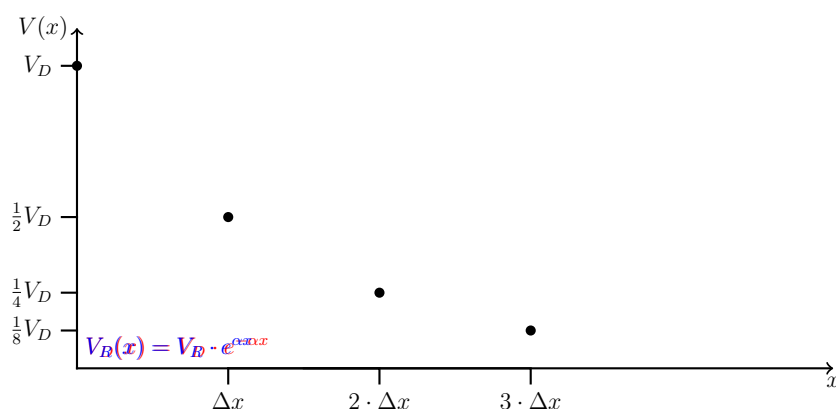


Figura 5.4: Andamento qualitativo del potenziale

Matematicamente l'ampiezza della tensione in un punto della linea è una *funzione* decrescente della sua *posizione*  $x$ , che gode della proprietà di dimezzarsi per incrementi fissi della variabile. Sappiamo che questo comportamento è caratteristico della funzione esponenziale.

La sua espressione matematica, (D significa *diretta*), dovrebbe essere quella di un esponenziale decrescente:

$$V_D(x) = V_D \cdot e^{-\alpha x}$$

dove con  $\alpha$  abbiamo indicato una costante opportuna. Essendo ad esponente di una funzione esponenziale a base naturale, essa viene misurata in  $\frac{Np}{m}$

Prima di concludere la nostra analisi, dobbiamo anche considerare il caso che la trasmissione avvenga in senso contrario. In effetti la linea è perfettamente speculare, quindi può benissimo essere usata in senso contrario. In questo caso il potenziale verrebbe immesso in linea dall'altro lato e, propagandosi a ritroso, verrebbe attenuato. Osservando i diversi valori del potenziale in linea, quindi, noi vedremmo un valore basso in corrispondenza del punto di inizio,  $x = 0$ , e, via via, valori sempre più alti.

Matematicamente è ora un esponenziale crescente, la cui espressione matematica dovrebbe essere la seguente (R significa *riflessa*):

$$V_R(x) = V_R \cdot e^{\alpha x}$$

### 5.1.2 Il livello del segnale in $dB_m$ e l'attenuazione

Conoscendo le ampiezze dell'onda diretta di tensione e di corrente è possibile calcolare la *potenza* media, cioè l'energia media ad unità di tempo, richiesta al trasmettitore, e restituita al ricevitore. Ricordiamo, infatti, che la potenza media si calcola nel seguente modo:

$$P = V_{eff} \cdot I_{eff}$$

Nel punto iniziale,  $x = 0$ , l'ampiezza è:  $V_1 = V_D$  per cui si ha:

$$P_1 = \frac{V_D \cdot I_D}{2} = \frac{V_D^2}{2 \cdot Z_0}$$

In ambiente tecnico ed in particolare nelle telecomunicazioni, la potenza viene determinata in *unità logaritmiche*, riferendo la stessa ad una unità convenzionale, definita in modo standard a livello internazionale.

L'unità convenzionale di potenza nelle telecomunicazioni è:  $P_0 = 1 \text{ mW}$  e il relativo *livello* di potenza,  $L$ , è espresso in unità logaritmiche dette:  $dB_m$ , un acronimo che sta per: *decibel milliwatt*. Esso è così definito:

$$L = 10 \cdot \log_{10} \frac{P}{P_0}$$

Abbiamo allora, per  $x = 0$ :

$$L_1 = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_1}{P_0} \quad [dB_m]$$

Propagandosi lungo la linea il segnale si attenua, per cui giungerà all'altro capo con una ampiezza:  $V_2 = V_D \cdot e^{-\alpha L}$ , per cui si ha:

$$P_2 = \frac{V_D \cdot e^{-\alpha L} \cdot I_D \cdot e^{-\alpha L}}{2} = \frac{(V_D \cdot e^{-\alpha L})^2}{2 \cdot Z_0}$$

Abbiamo allora, per  $x = L$ :

$$L_2 = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_2}{P_0} \quad [dB_m]$$

Utilizzando le unità logaritmiche è facile calcolare l'attenuazione,  $A$ , del cavo, infatti si ha:

$$A = L_1 - L_2 \quad [dB]$$

Questa quantità è poco significativa, in quanto dipende dalla lunghezza del cavo. Risulta più significativa l'attenuazione ad unità di lunghezza,  $a$ , così definita:

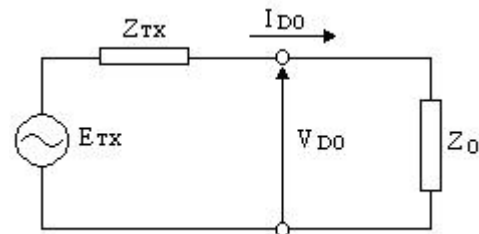
$$a = \frac{A}{L} = \frac{L_1 - L_2}{L} \quad \left[ \frac{dB}{m} \right]$$

Essa corrisponde, a parte un fattore di conversione<sup>1</sup> da  $\frac{dB}{m}$  a  $\frac{Np}{m}$ , con la costante di attenuazione  $\alpha$ .

### 5.1.3 La condizione per il massimo trasferimento di energia

All'interfaccia trasmettitore canale si può fare il modello elettrico seguente:

La linea vede il trasmettitore come un generatore  $E_{TX}$  con impedenza interna  $Z_{TX}$ , mentre per il trasmettitore la linea equivale ad un carico passivo pari alla sua impedenza caratteristica.



Le ampiezze,  $V_{D0}$  e  $I_{D0}$  dei segnali immessi in linea dal generatore, sono allora:

$$V_{D0} = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_{TX}} \cdot E_{TX} \quad I_{D0} = \frac{E_{TX}}{Z_0 + Z_{TX}}$$

Osservando l'espressione di  $V_{D0}$ , si deduce che, a parità di forza elettromotrice  $E_{TX}$ , il segnale immesso in linea è funzione del rapporto:  $\frac{Z_0}{Z_{TX}}$ , il quale a sua volta

---

<sup>1</sup>(1  $\frac{Np}{km} \approx 8,686 \frac{dB}{km}$ )

potrebbe dipendere dalla frequenza.

Ma se ciò avvenisse, dato che il segnale immesso, è, in base al teorema di Fourier, un insieme di armoniche con frequenze crescenti, per ciascuna componente tale rapporto sarebbe diverso e pertanto il segnale immesso in linea subirebbe una *distorsione*, denominata *distorsione di frequenza*, già al momento della sua immisione in linea.

Perchè questo non accada bisogna che il rapporto delle impedenze non dipenda dalla frequenza, ovvero che sia una costante.

Si osserva, poi, che, se l'impedenza caratteristica prevale su  $Z_{TX}$ , cioè se il rapporto è elevato, allora l'ampiezza della tensione diventa massima, ma quella della corrente tende a zero e quindi il trasferimento di energia tra trasmettitore e linea è minimo.

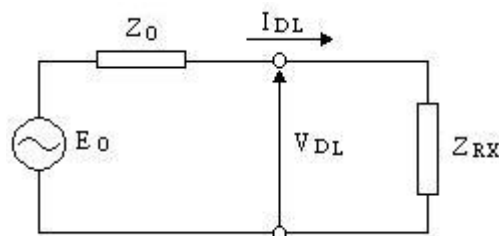
Analogamente, si osserva che, se  $Z_{TX}$  prevale sull'impedenza caratteristica, cioè se il rapporto è molto basso, allora è l'ampiezza della tensione che diventa minima, e quindi il trasferimento di energia tra trasmettitore e linea è ancora minimo.

Nella ipotesi che *le impedenze siano resistive*, si dimostra, ad esempio con lo studio di funzione, che: *la condizione per il massimo trasferimento di energia tra trasmettitore e linea è che le due resistenze siano uguali*<sup>2</sup>:

$$Z_{TX} = Z_0$$

Questa condizione è anche denominata: *condizione di adattamento tra trasmettitore e linea*.

Al lato ricevitore, d'altronde, il ricevitore stesso è visto dalla linea come un carico passivo  $Z_{RX}$ , mentre la linea è vista come un generatore avente impedenza interna pari ancora a  $Z_0$



Considerazioni analoghe comportano che, anche al lato del ricevitore, per avere il massimo trasferimento di energia, le due impedenze, nella ipotesi che siano resistive, debbano essere uguali:

$$Z_0 = Z_{RX}$$

Questa condizione come vedremo meglio in seguito, comporta anche che *tutto il segnale che si propaga verso il ricevitore venga da esso assorbito* e che quindi non

<sup>2</sup>Se le impedenze hanno una parte immaginaria, allora la condizione di massimo trasferimento di energia si raggiunge quando le parti resistive sono uguali e le parti reattive uguali ed opposte.

si verifichi alcuna riflessione.

Anche per questo motivo la condizione viene denominata: *condizione di adattamento* tra ricevitore e linea.

## 5.2 Il modello elettrico di una linea

### 5.2.1 Le costanti primarie

Consideriamo un tratto di linea dal generico punto  $x$  al punto  $x + \Delta x$ , cioè di lunghezza  $\Delta x$  e ci chiediamo quali siano i parametri dei cavi che possono alterare la tensione e la corrente tra questi due punti. Osserviamo intanto che:

- i conduttori hanno una *resistenza*  $\Delta R$  che per quanto piccola, non è nulla e quindi su di essa verrà dissipata un pò di energia per effetto Joule;
- essendo, poi, i conduttori attraversati da corrente, si dovrà creare nello spazio circostante un campo magnetico, che per quanto piccolo è comunque diverso da zero. L'energia impiegata per la sua formazione dipende dalla *induttanza* propria  $\Delta L$  dei conduttori stessi, piccola, ma non nulla;
- la struttura costituita dai conduttori e dall'isolante è equivalente ad un condensatore, all'interno del quale si crea un campo elettrico, che, per quanto piccolo, non è nullo. L'energia utilizzata per la sua formazione dipende dalla *capacità*  $\Delta C$  presente tra i due conduttori, a sua volta legata alle caratteristiche geometriche del cavo, superficie dei conduttori e distanza tra di essi, e dalle proprietà dielettriche dell'isolante.
- infine consideriamo anche la eventualità che l'isolante che separa i due conduttori non sia ideale. Infatti la resistenza di isolamento dell'isolante è molto alta, ma non infinita. Questo comporta che, per lunghe distanze, un po' di corrente possa circolare attraverso l'isolante, comportando anche in questo caso la dissipazione di una certa quantità di energia per effetto Joule. La conducibilità dell'isolante la valutiamo attraverso la sua *conduttanza*  $\Delta G$ , data dall'inverso della resistenza di isolamento.

Queste quantità, però, non sono affatto costanti, ma sono *direttamente proporzionali* alla lunghezza del tratto di cavo considerato. Per avere delle quantità costanti le dobbiamo rapportare ad esso. Introduciamo allora le seguenti *quantità specifiche*, che chiamiamo *costanti primarie della linea*, così definite:

**Definizione 15.** : *costanti primarie di una linea elettrica*

- resistenza ad unità di lunghezza: *la resistenza propria dei cavi, rapportata al tratto considerato:*

$$l = \frac{\Delta L}{\Delta x} \left[ \frac{H}{m} \right]$$

- induttanza ad unità di lunghezza: *l'induttanza propria dei cavi, rapportata al tratto considerato:*

$$r = \frac{\Delta R}{\Delta x} \left[ \frac{\Omega}{m} \right]$$

- capacità ad unità di lunghezza: *la capacità tra i due cavi, rapportata al tratto considerato:*

$$c = \frac{\Delta C}{\Delta x} \left[ \frac{F}{m} \right]$$

- conduttanza ad unità di lunghezza: *l'inverso della resistenza di isolamento del materiale isolante, rapportata al tratto considerato:*

$$g = \frac{\Delta G}{\Delta x} \left[ \frac{\Omega^{-1}}{m} \right]$$

Come specificato, tutti i parametri sono rapportati ad un tratto di linea unitario e questo fa sì che il loro valore, sempre che la linea sia regolare, cioè costruita in modo che le sezioni, le distanze, i materiali si mantengano esattamente allo stesso valore lungo tutta la linea, non è influenzato dalla lunghezza del tratto considerato, né dalla sua posizione. In questo senso sono costanti <sup>3</sup>.

## Il modello a costanti concentrate

Con le costanti primarie è possibile costruire un primo modello equivalente della linea, figura 5.5.

Per ottenerlo, indicata con  $L$  la lunghezza della linea, consideriamo la linea stessa come un unico tratto avente lunghezza  $\Delta x = L$  e costruiamo un modello equivalente, *concentrando* i parametri relativi a tutta la linea in un unico elemento, inserito nel modello in serie o in parallelo.

Nel modello di figura 5.5 la resistenza e l'induttanza dei cavi sono inserite in serie in quanto proprie dei due conduttori metallici, mentre la capacità e la conduttanza sono messe in parallelo, in quanto sono presenti tra i due conduttori.

Secondo questo modello, la linea è un circuito risonante, il quale introduce un *effetto filtrante* sul segnale, di tipo *passa basso*, dovuto sia alla presenza del condensatore in parallelo, che della bobina in serie. Infatti la reattanza copacitiva

---

<sup>3</sup>il loro valore, però, dipende in generale dalla *frequenza* del segnale immesso in linea



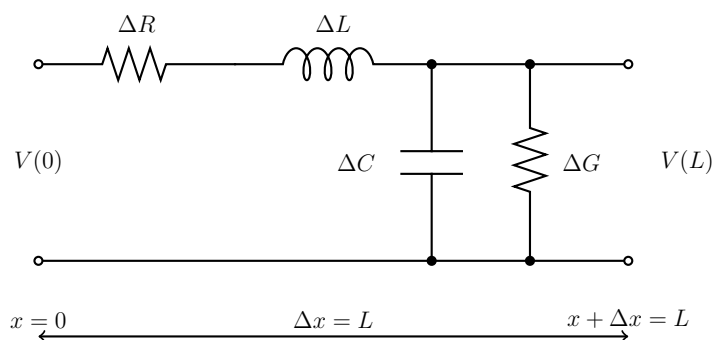


Figura 5.5: Modello della linea a costanti concentrate

dipende inversamente dalla frequenza, per cui, alle alte frequenze, il condensatore ha bassa reattanza ed è equivalente ad un interruttore chiuso. Essendo in parallelo tende a cortocircuitare l'uscita. La reattanza induttiva, invece, dipende direttamente dalla frequenza, per cui, alle alte frequenze, la bobina ha alta reattanza ed è un interruttore aperto. Essendo in serie, tende a staccare l'uscita dall'entrata. Questo modello a costanti concentrate riproduce, però, solo approssimativamente il comportamento del tratto di linea considerato. In particolare esso non è in grado di prevedere, come si propaga il segnale da punto a punto lungo il cavo e non ci consente di ottenere una espressione dei suoi parametri.

### Il modello a costanti distribuite

Per migliorare il modello, suddividiamo la linea in tratti  $\Delta x$  ed accorciamo la lunghezza di ciascun tratto, facendo tendere  $\Delta x$  a zero. Il modello che otteniamo, figura 5.6, detto a costanti *distribuite*, descrive il comportamento della linea localmente, in ciascun punto della stessa.

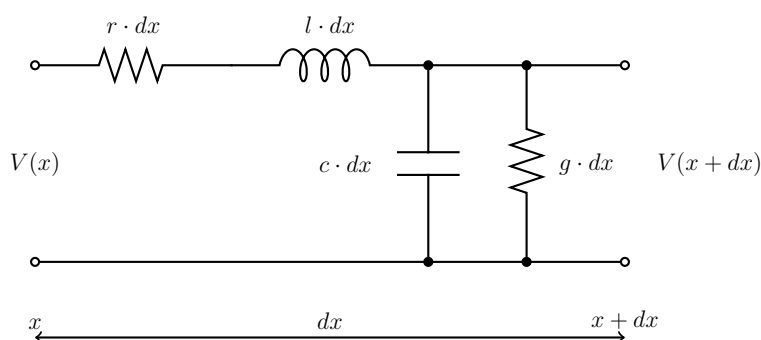


Figura 5.6: Modello a costanti distribuite

### 5.2.2 Le equazioni di propagazione

Per il tratto  $dx$  di linea considerato, la tensione e la corrente è alterata localmente dalla presenza dei parametri su definiti. Più precisamente, i parametri posti in serie, cioè sul percorso del segnale, ai capi dei quali si determina una caduta di potenziale, alterano la tensione, ma non la corrente <sup>4</sup>.

Invece i parametri posti in derivazione, tra l'uno e l'altro conduttore, alterano la corrente, deviando parte della corrente da un conduttore all'altro, ma non la tensione <sup>5</sup>.

#### Effetto sulla tensione

Per determinare l'effetto dei parametri sulla tensione basta considerare il modello semplificato di figura 5.7, con i soli parametri posti in serie, cioè  $r$  ed  $l$ .

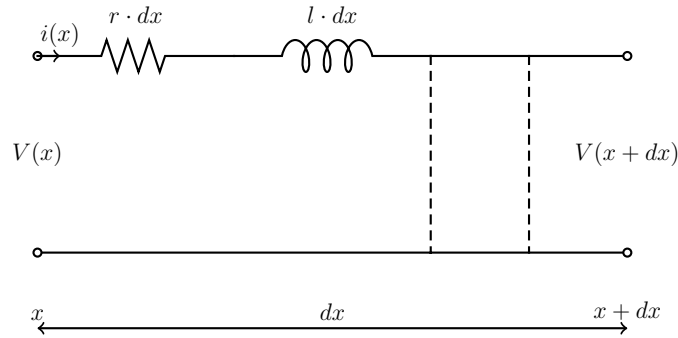


Figura 5.7: Modello semplificato per la determinazione dell'effetto sulla tensione

Applichiamo, simbolicamente, il secondo principio di Kirchhoff e determiniamo la caduta di tensione sugli elementi presenti nel nostro modello (serie tra la resistenza e la reattanza della bobina):

$$V(x) - V(x + dx) = (r \cdot dx + j\omega l \cdot dx) \cdot i(x) = z \cdot dx \cdot i(x)$$

La quantità:

$$z = r + j\omega l \quad \left[ \frac{\Omega^{-1}}{m} \right]$$

è l'*impedenza ad unità di lunghezza*, opposta dai parametri che nel modello si presentano in serie.

Dividendo ambo i membri per  $dx$ , si ottiene (nel primo membro c'è, a parte il

<sup>4</sup>Si ricorda che: i componenti in serie sono attraversati dalla stessa corrente

<sup>5</sup>Si ricorda che: i componenti in parallelo hanno ai loro capi la stessa differenza di potenziale

segno, un rapporto incrementale):

$$\frac{dV(x)}{dx} = -z \cdot i(x)$$

Abbiamo ottenuto una equazione, chiamata *equazione di propagazione del potenziale*, dove compare a primo membro la derivata del potenziale fatta rispetto ad  $x$ , che è una lunghezza. Una tale derivata viene denominata gradiente, in quanto stabilisce la gradazione con cui varia il potenziale da punto a punto lungo la linea. L'equazione stabilisce che:

*la variazione da punto a punto del potenziale è direttamente proporzionale alla corrente che scorre in quel punto.*

### Effetto sulla corrente

Per determinare l'effetto sulla corrente, consideriamo nel modello soltanto i parametri che influiscono sulla corrente, cioè  $c$  e  $g$ , come in figura 5.8.

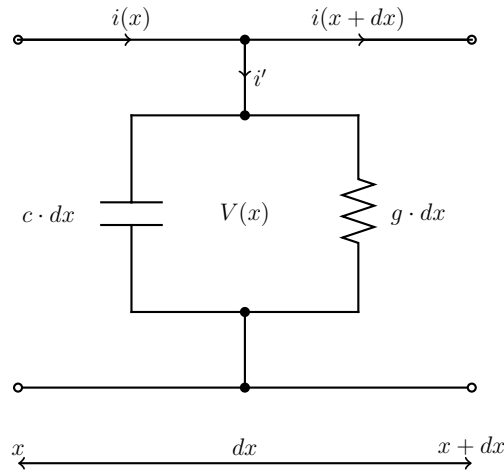


Figura 5.8: Modello semplificato per la determinazione dell'effetto sulla corrente

Ricaviamo prima, simbolicamente, il parallelo,  $Z_p$ , tra la reattanza del condensatore e la resistenza di isolamento:

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{R_{is}} + \frac{1}{X_c} = g \cdot dx + j\omega c \cdot dx = y \cdot dx$$

La quantità:

$$y = g + j\omega c \quad \left[ \frac{\Omega^{-1}}{m} \right]$$

è l'*ammettenza ad unità di lunghezza*, opposta dai parametri che nel modello si presentano in parallelo. L'ammettenza corrisponde all'inverso dell'impedenza.

Applichiamo il primo principio di Kirchhoff e determiniamo, simbolicamente, la quantità di corrente deviata da un conduttore all' altro:

$$i' = i(x) - i(x + dx) = \frac{V(x)}{Z_p} = y \cdot dx \cdot V(x)$$

Dividendo ambo i membri per  $dx$ , si ottiene (nel primo membro c'è ancora, a parte il segno, un rapporto incrementale):

$$\frac{di(x)}{dx} = -y \cdot V(x)$$

Abbiamo ottenuto una seconda equazione, chiamata *equazione di propagazione della corrente*, dove compare a primo membro la derivata della corrente fatta rispetto ad  $x$ , che è una lunghezza. Anche questa derivata corrisponde ad un gradiente, stabilendo la gradazione con cui varia la corrente da punto a punto lungo la linea. L'equazione stabilisce che:

*la variazione da punto a punto della corrente è direttamente proporzionale al potenziale presente in quel punto.*

### 5.2.3 Le soluzioni delle equazioni di propagazione

Riprendiamo le due equazioni trovate:

$$\begin{cases} \frac{dV(x)}{dx} = -z \cdot i(x) \\ \frac{di(x)}{dx} = -y \cdot V(x) \end{cases}$$

Esse costituiscono un sistema di equazioni coinvolgente sia la tensione che la corrente. C'è, però, un problema: se cerchiamo di ricavare la tensione dalla prima equazione, vediamo che essa dipende dalla corrente, ma andando a ricavare la corrente nella seconda equazione, troviamo che essa dipende dalla tensione. Per risolvere il sistema dobbiamo prima trasformarlo in modo da avere una equazione solo per la tensione ed una solo per la corrente. A tale scopo, usando il metodo di sostituzione, ricaviamo la corrente dalla prima equazione e la sostituiamo nella seconda. Questa operazione ci costringe a derivare due volte il potenziale. Otteniamo:

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = z \cdot y \cdot V(x)$$

La quale è un' equazione che coinvolge solo il potenziale.

Ricaviamo, poi, il potenziale dalla seconda e lo sostituiamo nella prima. Questa

operazione ci fa derivare due volte la corrente. Otteniamo:

$$\frac{d^2 i(x)}{dx^2} = z \cdot y \cdot i(x)$$

La quale è un'equazione che coinvolge solo la corrente.

Osserviamo, intanto, la somiglianza tra le due equazioni: in pratica è la stessa equazione, corrispondente alla cosiddetta *equazione delle onde*. Infatti essa è perfettamente compatibile con le funzioni seno e coseno (partendo ad esempio dal seno, e derivando otteniamo il coseno; derivando ancora riotteniamo nuovamente il seno), che, come sappiamo, hanno il caratteristico andamento ondulatorio. Se il nostro modello funziona, risolvendo queste equazioni dovremmo trovare che tensione e corrente hanno in linea un andamento di tipo esponenziale decrescente. Cerchiamo allora la soluzione per la tensione, con la prima equazione:

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = z \cdot y \cdot V(x)$$

Ipotizziamo che il trasmettitore immette in linea l'onda diretta:  $V_D(x)$  il cui andamento sia un esponenziale decrescente, con un certo coefficiente  $\gamma$ :

$$V_D(x) = V_{D0} \cdot e^{-\gamma x}$$

Derivando due volte e sostituendo nella equazione di partenza, otteniamo:

$$V_D(x)'' = -\gamma^2 \cdot V_{D0} \cdot e^{-\gamma x} = z \cdot y \cdot V_{D0} \cdot e^{-\gamma x}$$

Da cui risulta:

$$\gamma = \sqrt{z \cdot y}$$

Essendo  $z$  ed  $y$  quantità complesse, anche  $\gamma$  risulta complessa, per cui possiamo scrivere:

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

La quantità  $\gamma$  che compare ad esponente nell'espressione dell'onda diretta, determina le caratteristiche di propagazione del segnale, non solo in relazione alla *attenuazione*, ma anche allo *sfasamento*.

**Definizione 16.** Si definisce costante di propagazione la quantità costante *gamma*.

Essa è una *costante secondaria* della linea. Il suo valore, infatti, dipende dalle costanti primarie della linea, e dalla frequenza del segnale.

La parte reale di  $\gamma$ , indicata con  $\alpha$ , è chiamata: *costante di attenuazione* in quanto determina l'attenuazione dell'ampiezza della tensione in linea.

La parte immaginaria di  $\gamma$ , invece, indicata con  $\beta$ , è chiamata: *costante di fase* in quanto determina uno sfasamento della tensione, nel punto  $x$ , rispetto al punto iniziale, dovuto al ritardo di propagazione.

### L'impedenza caratteristica

Rifacendo lo stesso identico procedimento per la seconda equazione differenziale, relativa alla corrente, si ottiene :

$$i_D(x) = I_{D0} \cdot e^{-\gamma x}$$

Dunque il trasmettitore immette in linea le due onde:

$$\begin{cases} V_D(x) = V_{D0} \cdot e^{-\gamma x} \\ i_D(x) = I_{D0} \cdot e^{-\gamma x} \end{cases}$$

Eseguendo il rapporto tra  $V_D(x)$  e  $i_D(x)$ , otteniamo:

$$\frac{V_D(x)}{i_D(x)} = \frac{V_{D0}}{I_{D0}}$$

Quindi il rapporto tra le ampiezze della tensione e della corrente è una costante indipendente da  $x$ , ovvero dal particolare punto della linea considerato. Tale rapporto ha le dimensioni di una *impedenza* e per questa ragione è chiamato: *impedenza caratteristica*,  $Z_0$ , della linea, definita nel seguente modo:

**Definizione 17.** Si definisce *impedenza caratteristica*,  $Z_0$ , di una linea elettrica, il rapporto costante tra le ampiezze della tensione diretta e della corrente diretta, in un qualunque punto della linea.

Per determinare la sua espressione sostituiamo le espressioni di tensione e corrente in una delle equazioni di propagazione, ad esempio nella prima:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -z \cdot i(x)$$

Otteniamo:

$$\frac{d[V_{D0} \cdot e^{-\gamma x}]}{dx} = -\gamma V_{D0} \cdot e^{-\gamma x} = -z \cdot I_{D0} \cdot e^{-\gamma x}$$

Ovvero:

$$Z_0 = \frac{V_{D0}}{I_{D0}} = \frac{z}{\gamma} = \sqrt{\frac{z}{y}}$$

La conoscenza del suo valore consente di determinare l'ampiezza,  $I_{D0}$ , della corrente richiesta dalla linea. Anche  $Z_0$  è una *costante secondaria* della linea. Anche il suo valore, infatti, dipende dalle costanti primarie della linea e dalla frequenza del segnale.

### Linea senza perdite

In generale, abbiamo osservato, l'impedenza caratteristica e la costante di propagazione potrebbero dipendere dalla *frequenza* del segnale immesso in linea.

Ciò, però, non deve succedere, altrimenti, cambiando la frequenza del segnale, cambierebbe completamente il comportamento del cavo.

Per evitare questo inconveniente bisogna costruire il cavo con caratteristiche specifiche molto particolari. Ciò differenzia qualitativamente un cavo per telecomunicazioni da un cavo qualsiasi.

Esaminiamo come primo caso, un cavo sostanzialmente *ideale*, dove i parametri di tipo resistivo sono nulli. Supponiamo che sia, cioè:  $r = 0$  e  $g = 0$ . Una linea con queste caratteristiche ideali è chiamata: *linea senza perdite*. Naturalmente una linea di questo tipo non esiste nella realtà, ma è comunque possibile cercare di realizzare i cavi in modo che la componente resistiva abbia valore più basso possibile e sia comunque molto minore della parte reattiva. Per una linea senza perdite si ha:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{0 + j\omega l}{0 + j\omega c}} = \sqrt{\frac{l}{c}}$$

$$\gamma = \sqrt{z \cdot y} = \sqrt{-\omega^2 \cdot lc} = j\omega\sqrt{lc}$$

Abbiamo il notevole risultato che l'impedenza caratteristica dipende *solo* dai parametri reattivi del cavo.

Invece la costante di propagazione ha un valore immaginario. Questo significa che in linea non c'è affatto attenuazione, ma vi è invece un ritardo di propagazione ed un conseguente sfasamento tra la tensione all'inizio della linea e la tensione al punto  $x$ .

### La condizione di Heaviside

Abbiamo detto che nella realtà i parametri resistivi, per quanto piccoli, hanno comunque un valore diverso da zero, per cui il risultato trovato precedentemente è solo una approssimazione. Heaviside si rese conto che conviene comunque fare in modo che i componenti resistivi assumano valori *proporzionati* con le rispettive parti reattive e propose la seguente condizione da seguire nella realizzazione dei cavi per telecomunicazioni:

$$r : l = g : c$$

Applicando la condizione di Heaviside, si ottiene, per l'impedenza caratteristica:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}} = \sqrt{\frac{l \cdot (\frac{r}{l} + j\omega)}{c \cdot (\frac{g}{c} + j\omega)}} = \sqrt{\frac{l}{c}}$$

Quindi esattamente lo stesso valore, costante, che si ha per la linea senza perdite.

Applicando, invece, la condizione di Heaviside per il calcolo della costante di propagazione, e posto:

$$\frac{r}{l} = \frac{g}{c} = \sqrt{\frac{r \cdot g}{l \cdot c}}$$

si ottiene:

$$\gamma = \sqrt{z \cdot y} = \sqrt{lc \cdot \left(\frac{r}{l} + j\omega\right) \cdot \left(\frac{g}{c} + j\omega\right)} = \sqrt{lc \cdot \left(\sqrt{\frac{rg}{lc}} + j\omega\right)^2} = \sqrt{rg} + j\omega\sqrt{lc}$$

Questa volta la costante di propagazione è una quantità complessa:

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

La sua parte reale, la *costante di attenuazione*, ha espressione:

$$\alpha = \sqrt{rg}$$

Come era logico aspettarsi essa dipende dalle costanti resistive ed è tanto più piccola quanto più esse sono piccole. La sua parte immaginaria, invece, la *costante di fase*, ha espressione:

$$\beta = \omega\sqrt{lc}$$

Essa ha la stessa espressione che aveva per la linea senza perdite. La condizione di Heaviside, con l'eccezione della costante di attenuazione, consente di ricondurre i parametri della linea ai valori che avrebbe la stessa se fosse senza perdite.

### L' onda diretta

Abbiamo visto che l'onda immessa dal trasmettitore in linea ha la seguente espressione matematica:

$$V_D(x) = V_D \cdot e^{-\gamma \cdot x} = V_D \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{-j\beta \cdot x}$$

Separando i termini di esponenziale reale, dipendente da  $\alpha$  e di esponenziale immaginario, dipendente da  $j\beta$ , riconducibile, con le formule di Eulero, alle funzioni seno e coseno, da cui si evidenzia il termine ondulatorio dell'onda.

Il primo termine,  $V_{D0}$ , rappresenta l'ampiezza della tensione all'inizio del cavo, così come è fornito dal trasmettitore. In altre parole, il segnale immesso dal trasmettitore è un segnale alternato cosinusoidale con ampiezza,  $V_{D0}$ , e frequenza  $f$ . Il secondo è il termine di *attenuazione*, per cui nel punto  $x$ , l'ampiezza della tensione diventa:  $V_{D0} \cdot e^{-\alpha \cdot x}$ .

Il terzo termine, l'esponenziale a esponente immaginario, è un fattore di fase, che



determina una *rotazione*, in ritardo, del vettore rappresentativo della tensione nel punto  $x$  della quantità:  $-\beta \cdot x$

Tenendo presenti le formule di Eulero:

$$e^{-j\beta \cdot x} = \cos(\beta \cdot x) - j \cdot \sin(\beta \cdot x)$$

possiamo scomporre  $V_D(x)$  nella sua parte reale e nella sua parte immaginaria:

$$V_D(x) = V_{D0} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) + j \cdot V_{D0} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x)$$

Per rappresentare graficamente  $V_D(x)$ , avremmo bisogno di tre assi: un asse per la parte reale, un asse per la parte immaginaria ed un terzo asse per le posizioni  $x$ . Di fatto ci si limita a rappresentare solo una delle due componenti, ad esempio la parte reale:

$$\text{Re}(V_D(x)) = V_{D0} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x)$$

il cui andamento è il seguente:

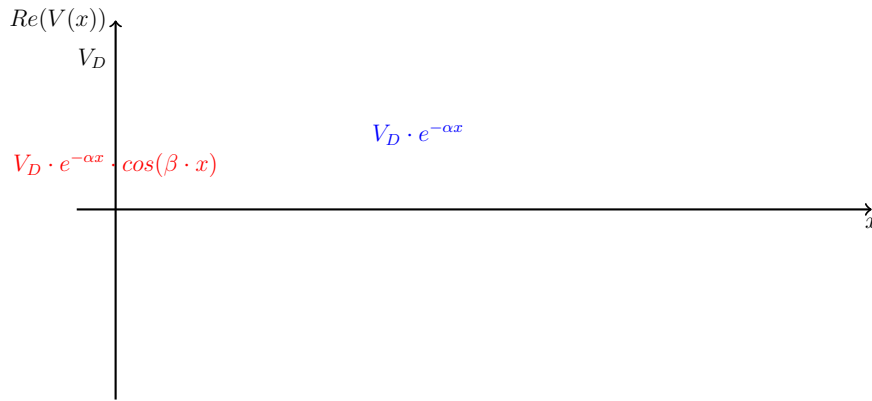


Figura 5.9: Parte reale dell'onda diretta di tensione

È importante far mente locale sul fatto che il grafico di figura 5.9 rappresenta la distribuzione<sup>6</sup> del potenziale lungo la linea nell'istante  $t = 0$ . In un certo senso il grafico coglie come in una foto istantanea l'insieme dei potenziali *in un dato istante*, ma già nell'istante successivo questa distribuzione cambia.

La curva di figura 5.9 ci consente solo di immaginare questi andamenti, a partire dall'istante  $t = 0$ .

Nel punto iniziale della linea, in cui  $x = 0$ , la tensione oscilla nel tempo con la legge del segnale immesso dal trasmettitore, tra i punti  $+V_D$  e  $-V_D$ , avendo come

<sup>6</sup>Possiamo risalire alla dipendenza temporale, ricordando che, dato un certo valore simbolico  $\bar{V}$ , si ha, usando il coseno:  $V(t) = \text{modulo}(\bar{V}) \cdot \cos[\omega \cdot t + \text{fase}(\bar{V})]$ . Per l'onda diretta otteniamo:  $V_D(x, t) = V_D \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot x)$

valore iniziale  $+V_D$ .

Spostandoci verso destra di una generica distanza  $x$ , la tensione varia ancora nel tempo con la stessa legge del segnale immesso in linea dal trasmettitore, ma ora oscilla tra i punti appartenenti alle linee di inviluppo, in azzurro:  $+V_D \cdot e^{-\alpha x}$  e  $-V_D \cdot e^{-\alpha x}$ , avendo come valore iniziale il valore della funzione:  $V_D \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$ .

Alla distanza  $\frac{\lambda}{4}$  dal trasmettitore, ci sarà uno sfasamento di  $90^\circ$ ;

Alla distanza  $\frac{\lambda}{2}$  lo sfasamento è di  $180^\circ$ ;

Alla distanza  $\frac{3}{4}\lambda$  dal trasmettitore, ci sarà uno sfasamento di  $270^\circ$ ;

Alla distanza  $\lambda$ , infine, lo sfasamento è di  $360^\circ$ . E così via.

Cosa succede globalmente alla distribuzione dopo un dato tempo  $t$ ?

Per fissare le idee supponiamo  $t$  pari a un quarto del periodo di oscillazione. Vediamo che: nel punto iniziale, la tensione è zero; a distanza  $\frac{\lambda}{4}$  invece è massima; a distanza  $\frac{\lambda}{2}$  è di nuovo zero; a distanza  $\frac{3}{4}\lambda$  è minima; a distanza  $\lambda$  è ancora zero. Possiamo vedere la distribuzione dopo un quarto di periodo in figura 5.10.

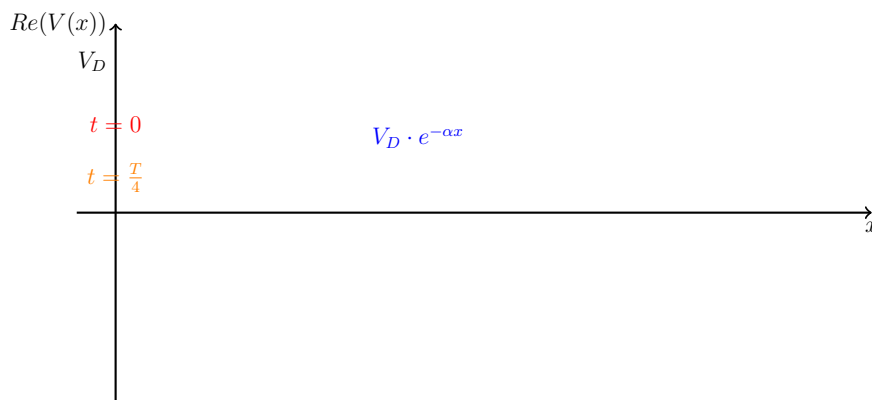


Figura 5.10: Parte reale dell'onda diretta dopo  $\frac{1}{4}$  di periodo

Esaminando la figura si osserva che, globalmente, la distribuzione dei potenziali in linea, dopo un quarto di periodo si è spostata verso il ricevitore, rispetto alla posizione che aveva precedentemente. Si comporta a tutti gli effetti come un'onda. Il fenomeno può essere comparato, se si vuole, al moto ondoso vicino ad una spiaggia. Le creste dell'onda si hanno nei punti dove attualmente il potenziale è massimo, e in istanti successivi si spostano di lato, proprio dove precedentemente il potenziale era minimo.

Analogamente per la corrente.

### La lunghezza d'onda e la velocità di propagazione

L'onda di tensione, come anche l'onda di corrente, si spostano dal trasmettitore al ricevitore con una propria velocità. Si introduce ora l'importante concetto di

lunghezza d'onda, necessario per determinarne la velocità.

**Definizione 18.** Si definisce lunghezza d'onda,  $\lambda$ , la distanza percorsa dall'onda nel suo periodo di ripetizione.

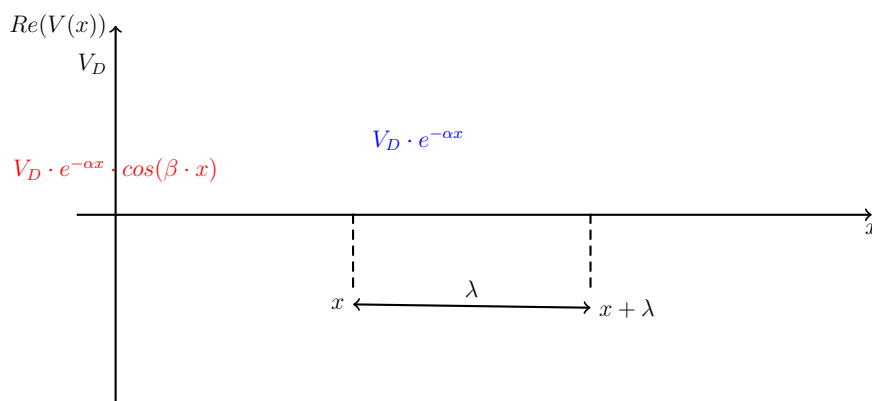


Figura 5.11: La lunghezza d'onda

Dal grafico di figura 5.11 vediamo che, al periodo  $T$ , ciascun picco della distribuzione va a sovrapporsi con il picco successivo, per cui la lunghezza d'onda,  $\lambda$ , corrisponde lungo  $x$  alla distanza compresa tra due picchi dell'onda. Allora, calcolando il coseno in queste due posizioni, cioè nella posizione  $x$  e nella posizione  $x + \lambda$ , si deve per forza ottenere lo stesso valore. Deve cioè essere:

$$\cos(\beta x) = \cos(\beta(x + \lambda))$$

Questo è possibile essendo il coseno una funzione periodica di periodo  $2\pi$ . Si ottiene:

$$\beta \cdot \lambda = 2\pi$$

ovvero:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

Possiamo ora determinare la velocità dell'onda,  $u$ , la quale sarà data dal rapporto tra la distanza percorsa dall'onda nell'unità di tempo. Prendendo come unità di tempo proprio il periodo di oscillazione, la distanza percorsa è  $\lambda$ , per cui si ha:

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = \frac{2\pi f}{\beta}$$

Il risultato notevole che si è ottenuto è che la velocità dell'onda è una funzione della frequenza del segnale! (Tenere ben presente che anche  $\beta$  dipende dalla frequenza). Non si tratta di un risultato lusinghiero, intanto perchè così la velocità rischia di

non essere quella massima consentita, cioè la velocità della luce, e poi perchè, essendo il nostro segnale in realtà un pacchetto di armoniche a frequenze tra loro vicine, ma diverse, ognuna di tali armoniche viaggerà ad una propria velocità, diversa da quella delle altre, raggiungendo il ricevitore in momenti successivi e quindi modificando il proprio rapporto di fase con le altre armoniche stesse. La distorsione indotta sul segnale da una velocità di propagazione non costante viene chiamata *distorsione di fase*. Il segnale che il ricevitore ricostruisce sarà allora diverso da quello lanciato dal trasmettitore.

Se, però, il cavo è realizzato rispettando la condizione di Heaviside, allora si ha il seguente risultato notevole:

$$u = \frac{2\pi f}{\omega\sqrt{lc}} = \frac{1}{\sqrt{lc}}$$

La velocità è diventata indipendente dalla frequenza<sup>7</sup>, dipendendo solo da  $l$  e da  $c$ .

Si potrebbe pensare di aumentare la velocità fin che si vuole, riducendo progressivamente il valore di queste costanti, ma ciò non può essere fatto all'infinito. Infatti la velocità di propagazione non può mai superare la velocità della luce nel vuoto e ciò significa che, ad un certo punto, se si cerca di diminuire ulteriormente  $l$ , si verifica un aumento di  $c$  mentre, se si cerca di diminuire ulteriormente  $c$ , si verifica un aumento di  $l$ .

Conoscendo la velocità possiamo ricavare il ritardo di propagazione,  $t_D$ , cioè il tempo che ci impiega l'onda per attraversare il cavo in tutta la sua lunghezza,  $L$ , dal trasmettitore al ricevitore. Essendo:

$$velocità = \frac{spazio}{tempo}$$

si ricava:

$$t_D = \frac{L}{u}$$

### Linea lunga

Ci proponiamo in questo paragrafo di stabilire quando una linea debba considerarsi lunga. Per poter rispondere al quesito bisogna disporre di un parametro di paragone, rispetto al quale paragonare la lunghezza della linea.

Come parametro di paragone viene presa, per omogeneità, la lunghezza d'onda  $\lambda$ . Esaminiamo i seguenti casi:

1.  $L > \lambda$

---

<sup>7</sup>nei limiti entro cui il prodotto delle costanti  $l$  e  $c$  è costante

In questo caso, propagandosi attraverso la linea, l'onda immessa dal trasmettitore fa in tempo ad attenuarsi ed anche a sfasarsi più di un giro completo. Gli effetti della propagazione sul segnale sono quindi sicuramente pesanti e la linea deve essere considerata lunga.

## 2. $L \ll \lambda$

Concretamente possiamo considerare  $L$  molto minore della lunghezza d'onda, quando è inferiore a  $\frac{\lambda}{10}$ . Propagandosi attraverso la linea, l'onda non fa in tempo ad attenuarsi significativamente e si sfasa di meno di  $45^\circ$ . Gli effetti della propagazione sul segnale sono quindi blandi e la linea può essere considerata corta.

## 3. $L \approx \lambda$

La linea è dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda, quando è leggermente più piccola, o quando è leggermente più grande. In questo caso è comunque possibile uno sfasamento significativo dell'onda immessa dal trasmettitore. Lo sfasamento comincia a diventare rilevante, quando è almeno dell'ordine di grandezza di  $45^\circ$ , cioè quando risulta:  $L > \frac{\lambda}{8}$ . Gli effetti della propagazione sul segnale cominciano a farsi sentire e la linea deve essere considerata lunga.

A conclusione della nostra analisi, possiamo dire che una linea va considerata lunga quando la sua lunghezza è una frazione significativa della lunghezza d'onda, per fissare le idee, quando risulta:  $L > \frac{\lambda}{8}$ .

L'analisi ha il seguente importante risvolto: una stessa linea è corta per alcune frequenze, mentre è lunga per altre. Il motivo è che, la lunghezza d'onda non è affatto costante, ma è inversamente proporzionale alla frequenza.

Vediamo questo apparente paradosso con un esempio.

Sappiamo che uno dei parametri cruciali di un elaboratore è la sua capacità di calcolo, corrispondente al numero di operazioni eseguite al secondo, la quale dipende dalla frequenza del clock, che ovviamente si cerca di incrementare costantemente. Attualmente un buon elaboratore opera con un clock di almeno 3GHz.

Naturalmente una scheda madre è fatta di tanti componenti, interconnessi con minuscole piste elettriche, che altro non sono che delle linee elettriche, seppure, almeno apparentemente, cortissime. La domanda è: queste 'piste' vanno considerate linee corte o linee lunghe?

Per rispondere al quesito calcoliamo la lunghezza d'onda, supponendo che sulle piste viaggino segnali numerici alla frequenza del clock. Si ottiene, considerando una velocità tipica di  $\frac{2}{3}c$ :

$$\lambda \leq \frac{2 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^9} = 0,066 \text{ m} = 6,6 \text{ cm}$$

Una pista di questa lunghezza è sicuramente lunga, ma va considerata lunga anche una pista di solo 1 cm o meno! Quanto più la frequenza aumenta, tanto più le piste, apparentemente corte, sono, in realtà, da considerarsi lunghe. Nell'ultimo decennio molte delle schede elettroniche devono essere progettate facendo attenzione alle caratteristiche delle piste, come se fossero a tutti gli effetti delle linee elettriche di comunicazione.

### 5.2.4 Onda riflessa e onda stazionaria

#### La riflessione come fenomeno

Facciamo riferimento alla figura 5.12, nel quale è stato riportato il circuito equivalente del trasmettitore e del ricevitore.

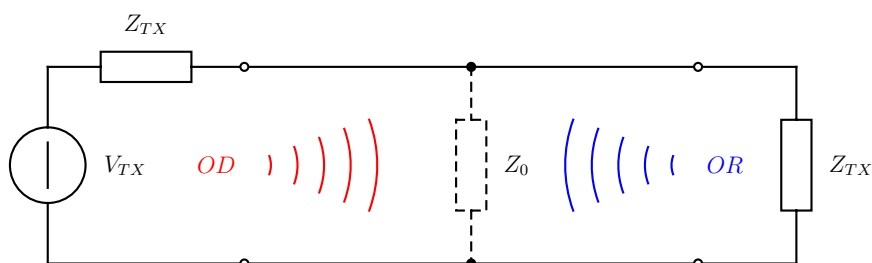


Figura 5.12: Linea elettrica bifilare con circuiti equivalenti del TX e del RX

Le onde dirette di tensione e corrente,  $V_D(x)$  e  $i_D(x)$ , si propagano lungo la linea, con ampiezze tali che il loro rapporto è, in ogni punto, pari all'impedenza caratteristica.

Quando raggiungono il ricevitore, l'impedenza cambia improvvisamente, dovendo corrispondere all'impedenza equivalente del ricevitore. Ma ciò significa che le due onde, in generale, non possono essere completamente assorbite dal ricevitore, altrimenti la legge di Ohm verrebbe violata, a meno che l'impedenza del ricevitore non sia uguale a quella della linea. Deduciamo, dalla nostra analisi qualitativa, la seguente condizione:

**Condizione 1.** *di adattamento del ricevitore*

*Condizione affinché l'onda diretta sia completamente assorbita dal ricevitore è che l'impedenza equivalente del ricevitore,  $Z_{RX}$ , sia uguale alla impedenza caratteristica,  $Z_0$ , della linea.*

$$Z_{RX} = Z_0$$

La parte dell'onda che non può essere assorbita dal ricevitore, invece, viene *riflessa verso il trasmettitore*, propagandosi a ritroso nella linea.

Quando l'onda riflessa raggiunge il trasmettitore, quest'ultimo oppone la sua impedenza equivalente e, se quest'ultima è diversa da quella della linea, si ha una ulteriore riflessione. Deduciamo una seconda condizione:

**Condizione 2.** *di adattamento del trasmettitore*

*Condizione affinché la quota di onda riflessa sia completamente assorbita dal trasmettitore è che anche l'impedenza equivalente del trasmettitore,  $Z_{TX}$ , sia uguale alla impedenza caratteristica,  $Z_0$ , della linea.*

$$Z_{TX} = Z_0$$

In pratica si crea riflessione in ogni punto in cui c'è una situazione di *disadattamento*. Nel seguito supponiamo che ci sia disadattamento solo al lato del ricevitore e che quello sia il punto in cui si origina l'onda riflessa.

**L'espressione e parametri dell'onda riflessa**

Sappiamo che, matematicamente l'onda riflessa è la soluzione delle equazioni di propagazione, con il termine esponenziale ad esponente positivo. Avremo, per tensione e corrente:

$$\begin{cases} V_R(x) = V_R \cdot e^{\gamma x} \\ i_R(x) = i_R \cdot e^{\gamma x} \end{cases}$$

Ad esempio, la parte reale dell'onda riflessa di tensione:

$$\text{Re}(V_R(x)) = V_R \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x)$$

ha l'andamento riportato nella figura 5.13.

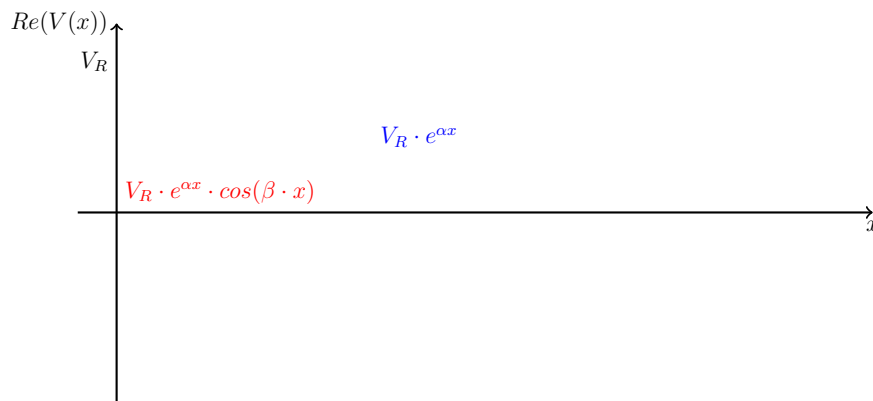


Figura 5.13: Parte reale dell'onda riflessa di tensione

Anche il grafico di figura 5.13 rappresenta la distribuzione<sup>8</sup> del potenziale lungo la linea nell'istante  $t = 0$ .

Ad esempio, all'inizio della linea, per  $x = 0$ , avremo:  $V_R(0) = V_R$  e  $i_R(0) = I_R$ , mentre all'altro capo della linea, per  $x = L$ , avremo:  $V_R(L) = V_R \cdot e^{\gamma L}$  e  $i_R(L) = I_R \cdot e^{\gamma L}$ , con il secondo valore maggiore del primo.

Ci aspettiamo che il rapporto delle loro ampiezze dia ancora  $Z_0$  ed andiamo a verificarlo usando una delle equazioni di propagazione:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -z \cdot i(x)$$

sostituiamo:

$$\frac{d[V_R \cdot e^{\gamma x}]}{dx} = -z \cdot i_R \cdot e^{\gamma x}$$

semplifichiamo e otteniamo:

$$\frac{V_R}{I_R} = -Z_0$$

Abbiamo ottenuto il risultato che ci aspettavamo, salvo un segno negativo.

Quale è il senso di questo segno meno ?

Esso è la conseguenza del fatto che l'onda riflessa si propaga a ritroso, quindi il verso *reale* della corrente va dal  $RX$  al  $TX$ , mentre il verso *convenzionale* è stato preso dal  $TX$  al  $RX$ . Noi, per comodità, continueremo ad usare il verso convenzionale.

### L'indice di riflessione

Ritorniamo sul fenomeno della riflessione che supponiamo verificarsi al lato del ricevitore. Come sappiamo, il trasmettitore lancia in linea le onde dirette di tensione e di corrente, le cui ampiezze, entrano con i valori noti<sup>9</sup>:

$$V_D \mid I_D$$

ed escono con i valori che indichiamo con:

$$V_{DL} \mid I_{DL}$$

anch'essi determinabili, noto il valore di  $L$  e della costante di propagazione. L'onda riflessa, invece, si crea nel punto  $L$ , con ampiezze che indichiamo con:

$$V_{RL} \mid I_{RL}$$

---

<sup>8</sup>Possiamo risalire alla dipendenza temporale, ricordando ancora che, dato un certo valore simbolico  $\bar{V}$ , si ha, usando il coseno:  $V(t) = modulo(\bar{V}) \cdot \cos[\omega \cdot t + fase(\bar{V})]$ . Per l'onda riflessa otteniamo:  $V_R(x, t) = V_R \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot x)$

<sup>9</sup>il primo è stabilito dal trasmettitore ed il secondo è legato alla impedenza caratteristica della linea



Di queste ampiezze possiamo intanto dire che sono una *frazione* delle corrispondenti ampiezze dell'onda diretta e che sono in *proporzione* con essa. Infatti, raddoppiando l'ampiezza dell'onda incidente, ci aspettiamo che anche l'ampiezza dell'onda riflessa raddoppi. Pertanto *il loro rapporto deve essere una costante*.

A tale scopo si introducono due quantità o indici, così definiti:

**Definizione 19.** *Si definisce indice di riflessione di tensione,  $k_v$ , il rapporto costante tra l'ampiezza dell'onda riflessa di tensione, nel punto in cui si origina, e l'ampiezza dell'onda diretta, nel medesimo punto.*

$$k_v = \frac{V_{RL}}{V_{DL}}$$

Analogamente:

**Definizione 20.** *Si definisce indice di riflessione di corrente,  $k_i$ , il rapporto costante tra l'ampiezza dell'onda riflessa di corrente, nel punto in cui si origina, e l'ampiezza dell'onda diretta, nel medesimo punto.*

$$k_i = \frac{I_{RL}}{I_{DL}}$$

Si verifica subito, però, che:

$$k_i = \frac{-\frac{V_{RL}}{Z_0}}{\frac{V_{DL}}{Z_0}} = -k_v$$

In pratica l'indice di riflessione è unico, essendo però opposto per la corrente, rispetto alla tensione.

### L'onda stazionaria

Se, come nella nostra ipotesi, il ricevitore non è adattato e c'è onda riflessa, allora l'onda riflessa, propagandosi a ritroso, si sovrappone all'onda diretta, dando luogo ad una risultante che è chiamata: *onda stazionaria*. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha infatti:

$$\begin{cases} V_T(x) = V_D(x) + V_R(x) \\ i_T(x) = i_D(x) + i_R(x) \end{cases}$$

Per comprendere intuitivamente a cosa porti la sovrapposizione delle due onde, in un punto dato  $x$ , immaginiamo il caso di due masse che convergono nel punto  $x$  da direzioni opposte. Se la loro dimensione è la stessa, allora i due movimenti

si annullano vicendevolmente e le due masse si compenetrano l'una con l'altra<sup>10</sup>. Anche nel caso delle onde, i movimenti contrapposti e di pari intensità, dell'onda diretta e dell'onda riflessa, danno come risultante assenza di movimento. In pratica l'energia delle due onde è costretta a *stazionare* nella linea, da cui il nome.

Però le due onde possono convergere in dato punto, essendo l'una rispetto all'altra con rapporto di fase qualsiasi ed allora l'effetto è completamente diverso a seconda, appunto, della loro differenza di fase. Distinguiamo le seguenti situazioni, per onde della stessa intensità:

- le due onde convergono nel punto  $x$ , essendo *in fase* tra loro. In questo caso l'effetto complessivo è doppio, ovvero l'onda complessiva oscilla con ampiezza più grande dell'ampiezza dell'onda diretta, addirittura doppia. Si dice che c'è stata *interferenza costruttiva* o anche che l'onda stazionaria presenta un *ventre*.
- ci spostiamo in un'altra posizione, in modo che le due onde convergono nel nuovo punto  $x'$ , essendo *in opposizione di fase* tra loro. In questo caso l'effetto complessivo è nullo, ovvero l'onda complessiva oscilla con ampiezza minima o nulla, minore dell'ampiezza dell'onda diretta. Si dice che c'è stata *interferenza distruttiva* o anche che l'onda stazionaria presenta un *nodo*.
- in tutti gli altri punti, in cui non sono nè in fase, nè in opposizione di fase. In questo caso l'effetto complessivo è intermedio.

In definitiva l'onda stazionaria si presenta con ampiezza di oscillazione diversa nei diversi punti della linea, presentando, come tutte le onde che interferiscono le così dette *frange di interferenza*.

Quanto è la distanza tra due ventri o due nodi consecutivi ?

Per fissare le idee, supponiamo che in un punto  $x$  ci sia un ventre.

Ma questo vuol dire che l'onda diretta e l'onda riflessa convergono in quel punto, con moti oscillatori *in fase* tra loro. Ad esempio entrambi i moti iniziano nel valore massimo.

Allora, se ci spostiamo da questo punto di una distanza pari alla lunghezza d'onda, i moti continueranno ad essere in fase e quindi alla distanza  $x \pm \lambda$  avremo sicuramente un altro ventre.

Se invece ci spostiamo di  $\frac{\lambda}{2}$ ? Succede che il moto dell'onda diretta si sfasa di  $180^\circ$ , iniziando sul valore minimo. Ma anche il moto dell'onda riflessa si sfasa di  $180^\circ$ , iniziando quindi, sul valore minimo. La conclusione è che i due movimenti sono ancora in fase. Prima iniziavano entrambi sul valore massimo, ora iniziano entrambi sul valore minimo.

Se vogliamo trovare un nodo ci dobbiamo spostare dal punto dove c'è il ventre di

---

<sup>10</sup>ipotesi di urto anelastico

una distanza pari a  $\frac{\lambda}{4}$ , dove i due movimenti risultano sfasati di  $\pm 90^\circ$ , cioè di  $180^\circ$  l'uno rispetto all'altro.

Concludiamo che la minima distanza tra due nodi o due ventri è di  $\frac{\lambda}{2}$ , mentre la distanza tra un nodo ed un ventre consecutivi è di  $\frac{\lambda}{4}$ .

### L'espressione dell'indice di riflessione

Naturalmente la somma dell'onda diretta e dell'onda riflessa dovrà fornire, al ricevitore, quindi per  $x = L$ , proprio il segnale assorbito dallo stesso. Dovrà quindi essere:

$$\frac{V_T(L)}{i_T(L)} = Z_{RX} = \frac{V_{DL} + V_{RL}}{I_{DL} + I_{RL}}$$

Raccogliendo  $V_{DL}$  e  $I_{DL}$ , si ricava:

$$Z_{RX} = \frac{V_{DL} \cdot (1 + \frac{V_{RL}}{V_{DL}})}{I_{DL} \cdot (1 + \frac{I_{RL}}{I_{DL}})}$$

Nei rapporti si riconoscono gli indici di riflessione di tensione e corrente, per cui si ottiene:

$$Z_{RX} = Z_0 \frac{1 + k_v}{1 - k_v}$$

Risolvendo rispetto a  $k$ , si ricava l'espressione dell'indice di riflessione in funzione delle impedenze della linea e del ricevitore:

$$k_v = \frac{Z_{RX} - Z_0}{Z_{RX} + Z_0}$$

Dunque  $k$  è una funzione di  $Z_{RX}$ , in generale una quantità complessa.

Siamo ora in grado di analizzare ciò che avviene al variare di  $Z_{RX}$ .

Abbiamo intanto un primo caso notevole, quando:

- $Z_{RX} = Z_0$

In questo caso *la linea è adattata* e si ha:  $k_v = 0$

Quando il ricevitore ha esattamente la stessa impedenza della linea, l'indice di riflessione è zero, pertanto non vi è onda riflessa. L'onda incidente, giunta al ricevitore, viene interamente assorbita dallo stesso.

Si dice anche che la linea opera in: *regime di onda progressiva* in quanto l'onda si muove effettivamente dal trasmettitore al ricevitore.

In tutti gli altri casi, quando:

- $Z_{RX} \neq Z_0$

La linea non è adattata e si ha:  $k_v \neq 0$

Quando l'impedenza del ricevitore è diversa dall'impedenza caratteristica, c'è onda riflessa, che sovrapponendosi all'onda diretta crea l'onda stazionaria.

Si dice che la linea opera in: *regime di onda stazionaria* perché le due onde, come abbiamo già detto, muovendosi con direzioni diametralmente opposte danno una risultante complessiva di staticità, in particolare in quei casi in cui nessuno dei due movimenti risulta prevalere sull'altro.

### Esempio 1: linea aperta

Questo caso si presenta quando il ricevitore, come in figura 5.14 non viene collegato alla linea e la linea viene lasciata aperta. L'impedenza che la linea vede verso il ricevitore è allora:

$$Z_{RX} = \infty$$

Deduciamo che, in corrispondenza del ricevitore, la corrente totale è nulla:

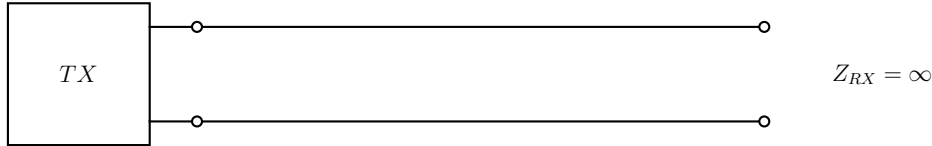


Figura 5.14: Linea elettrica aperta

$$i_T(L) = I_{DL} + I_{RL} = 0$$

ovvero che:  $I_{RL} = -I_{DL}$ , cioè che:  $k_i = -1$

Ma allora si ha:  $k_v = 1$ , ovvero:  $V_{RL} = V_{DL}$

Deduciamo che, in corrispondenza del ricevitore, la tensione totale è doppia. Possiamo verificare il nostro risultato anche utilizzando la espressione di  $k_v$ :

$$k_v = \frac{Z_{RX} - Z_0}{Z_{RX} + Z_0} = 1$$

Quindi, nel punto  $x = L$ , la *corrente* presenta un *nodo*, mentre la *tensione* presenta un *ventre*.

Allontanandoci dal ricevitore, vedremo, per la tensione, come per la corrente, le frange di interferenza. L'onda stazionaria<sup>11</sup> presenta, quindi, il profilo di ampiezza

<sup>11</sup>nella figura si è supposto per semplicità che il cavo sia *senza perdite*, in modo che le onde non si attenuino durante la propagazione. Nel caso più generale, man mano che l'onda riflessa risale verso il trasmettitore perde di intensità, mentre trova un'onda diretta sempre più intensa. L'effetto è visibile soprattutto per i nodi: infatti, mentre nei nodi vicini al ricevitore l'onda stazionaria è praticamente nulla, in quelli vicini al trasmettitore non è più nulla. Il grafico effettivo si discosta leggermente dal grafico di figura, mostrando differenze sempre più accentuate verso il trasmettitore.

di figura 5.15, con un alternarsi di punti, i ventri, in cui l'ampiezza è grande e punti, i nodi, in cui l'ampiezza è piccola, separati tra loro di  $\frac{\lambda}{4}$ .

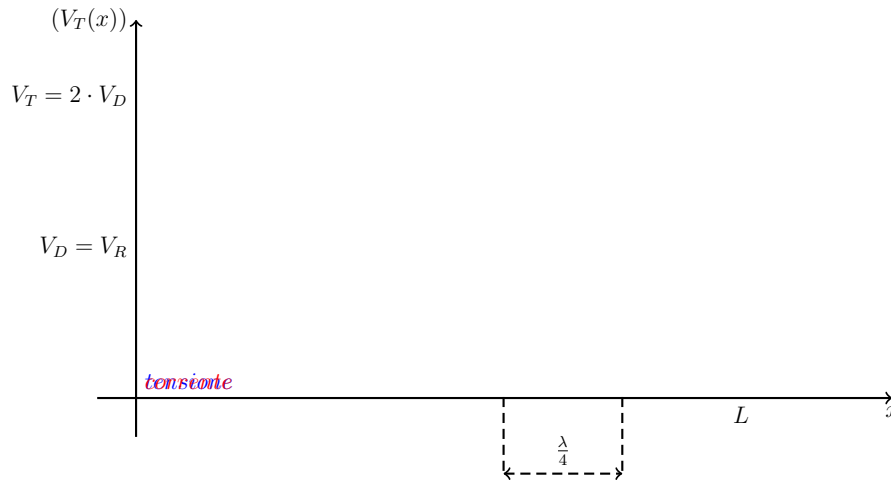


Figura 5.15: Onda Stazionaria per linea aperta senza perdite

Esaminando l'onda stazionaria in istanti successivi, si vede la tensione modificarsi nel tempo alla frequenza del segnale, ma i nodi ed i ventri presentarsi sempre nella medesima posizione. Il risultato è che l'onda stazionaria non si sposta né verso il  $TX$  né verso l' $RX$ , ma staziona nella medesima posizione. La distanza tra due ventri, o due nodi, consecutivi è sempre la stessa e vale  $\frac{\lambda}{2}$ . Invece la distanza tra un nodo ed un ventre consecutivi è  $\frac{\lambda}{4}$ .

### Esempio 2: linea in cortocircuito

Questo caso si presenta quando al ricevitore, come in figura 5.16, la linea viene cortocircuitata. L'impedenza che la linea vede verso il ricevitore è allora:

$$Z_{RX} = 0$$

Deduciamo che, in corrispondenza del ricevitore, la tensione totale è nulla:

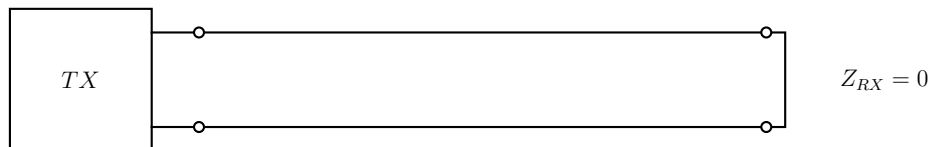


Figura 5.16: Linea elettrica in cortocircuito

$$V_T(L) = V_{DL} + V_{RL} = 0$$

ovvero che:  $V_{RL} = -V_{DL}$ , cioè che:  $k_v = -1$

Ma allora si ha:  $k_i = 1$ , ovvero:  $I_{RL} = I_{DL}$

Deduciamo che, in corrispondenza del ricevitore, la corrente totale è doppia. Possiamo verificare il nostro risultato anche utilizzando l'espressione di  $k_v$ :

$$k_v = \frac{Z_{RX} - Z_0}{Z_{RX} + Z_0} = -1$$

Quindi, nel punto  $x = L$ , la *tensione* presenta un *nodo*, mentre la *corrente* presenta un *ventre*.

Allontanandoci dal ricevitore, vedremo, per la tensione, come per la corrente, le frange di interferenza. L'onda stazionaria<sup>12</sup> presenta, ora, il profilo di ampiezza di figura 5.17, analogo a quello dell'esempio precedente, con un alternarsi di punti, i ventri, in cui l'ampiezza è grande e punti, i nodi, in cui l'ampiezza è piccola, separati tra loro di  $\frac{\lambda}{4}$ .

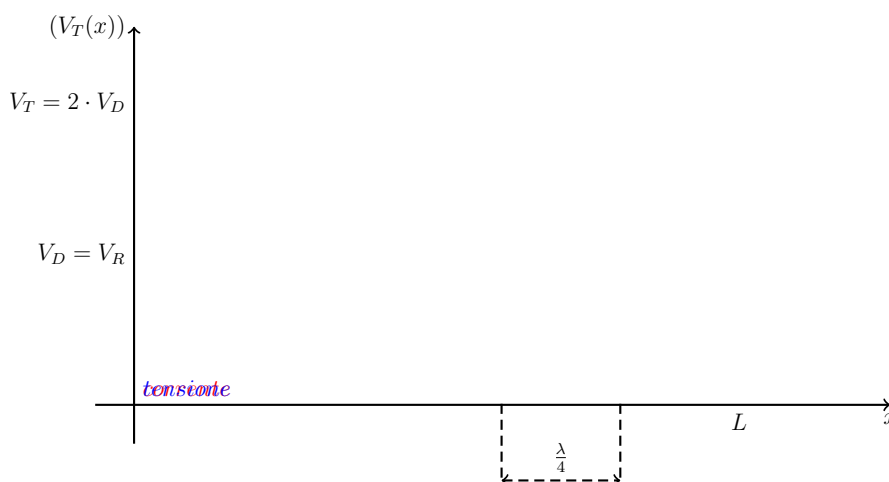


Figura 5.17: Onda Stazionaria per linea in cortocircuito senza perdite

Esaminando l'onda stazionaria in istanti successivi, si vede la tensione modificarsi nel tempo alla frequenza del segnale, ma, come nell'esempio precedente, i nodi ed i ventri presentarsi sempre nella medesima posizione. Il risultato è che l'onda stazionaria non si sposta né verso il  $TX$  né verso l' $RX$ , ma staziona nella

<sup>12</sup>anche in questo esempio, nella figura si è supposto per semplicità che il cavo sia *senza perdite*, in modo che le onde non si attenuino durante la propagazione. Nel caso più generale, man mano che l'onda riflessa risale verso il trasmettitore perde di intensità, mentre trova un'onda diretta sempre più intensa. L'effetto è visibile soprattutto per i nodi: infatti, mentre nei nodi vicini al ricevitore l'onda stazionaria è praticamente nulla, in quelli vicini al trasmettitore non è più nulla. Il grafico effettivo si discosta leggermente dal grafico di figura, mostrando differenze sempre più accentuate verso il trasmettitore.

medesima posizione. La distanza tra due ventri, o due nodi, consecutivi è sempre la stessa e vale  $\frac{\lambda}{2}$ . Invece la distanza tra un nodo ed un ventre consecutivi è  $\frac{\lambda}{4}$ .

### IL R.O.S.

Nel caso più generale, l'impedenza di carico può avere un valore qualsiasi, diverso dall'impedenza caratteristica, perciò l'indice di riflessione ha un imprecisato valore complesso. Anche in questo caso si genera, a causa del disadattamento, un'onda stazionaria, ma la differenza tra le ampiezze dell'onda ai nodi ed ai ventri è più contenuta. In particolare, la distanza tra i nodi, quella tra i ventri e quella tra un nodo ed un ventre non cambia, ma ai nodi l'ampiezza non è più totalmente nulla, mentre ai ventri non è più esattamente doppia del valore dell'onda incidente.

L'onda stazionaria è il principale indice della presenza di un disadattamento, presentandosi, infatti, anche quando il disadattamento è tra il  $TX$  e la linea. Il fatto che lungo la linea l'ampiezza dell'onda stazionaria sia fortemente diseguale, permette nella pratica di individuarne la presenza: basta infatti misurare l'ampiezza del potenziale in differenti punti della linea e confrontarli tra loro, individuando i nodi, cioè i punti di minima ampiezza ed i ventri, cioè i punti di massima ampiezza. Lo strumento predisposto per questo scopo si chiama *rosmetro*, ovvero misuratore di  $ROS$ , un acronimo che sta per: *rapporto onda stazionaria*, così definito:

$$ROS = \frac{V_{ventri}}{V_{nodi}}$$

Il valore del  $ROS$ , normalmente è espresso in unità logaritmiche.

L'utilizzazione più tipica del rosmetro consiste nella determinazione dell'adattamento ottimale dei dispositivi connessi ad una linea, ad esempio le antenne.

### 5.2.5 Questionario riepilogativo

1. Definisci le costanti primarie di una linea lunga e chiarisci le differenze tra il modello a costanti concentrate ed il modello a costanti distribuite. Spiega quando una linea è da considerarsi lunga e perché. Mostra l'effetto filtrante.
2. Ricava una delle equazioni di propagazione e mostra la soluzione generale del sistema di equazioni di una linea.
3. Definisci l'impedenza caratteristica e dimostra la sua espressione generale per l'onda diretta.
4. Dimostra l'espressione dell'impedenza caratteristica in un caso particolare.
5. Definisci la costante di propagazione e chiarisci il modo in cui influisce sulla distribuzione dei potenziali lungo la linea.
6. Dimostra le espressioni della costante di propagazione in un caso particolare.
7. Definisci il  $dB_m$  e mostra come si calcola il livello di segnale in un particolare punto della linea, nota l'ampiezza del segnale e l'impedenza caratteristica. Puoi fare un esempio numerico. Come si calcola, invece, l'attenuazione ?
8. Definisci la lunghezza d'onda e dimostra la sua espressione.
9. Dimostra l'espressione della velocità di propagazione in un caso particolare.
10. Definisci l'indice di riflessione e dimostra la sua espressione.
11. Una linea sta operando in regime di onda progressiva. Cosa vuol dire? Quando questo avviene ?
12. Una linea sta operando in regime di onda stazionaria. Cosa vuol dire? Quando questo avviene ?
13. Spiega il fenomeno dell'interferenza costruttiva e dell'interferenza distruttiva, indicando in quali punti avviene e perché.
14. Illustra il profilo dell'onda stazionaria con un esempio, mostrando graficamente la collocazione dei nodi e dei ventri e la loro distanza.



### 5.2.6 Esercizi di calcolo

1. Una linea, di lunghezza  $L = 5 \text{ km}$ , è caratterizzata dalle seguenti costanti primarie:  $r = 0,2 \frac{\Omega}{\text{m}}$ ;  $l = 4 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ;  $c = 5,5 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ . Il segnale immesso ha ampiezza di  $8 \text{ V}$  e frequenza di  $1 \text{ kHz}$ . Si chiede: il modello della linea ed il calcolo delle costanti nella ipotesi che sia soddisfatta la condizione di Heaviside; il calcolo delle costanti secondarie; l'espressione dell'onda diretta, con il calcolo e la rappresentazione ad inizio, a metà ed alla fine della linea; la condizione perchè la linea sia adattata. La linea va considerata lunga? Quanto tempo impiega il segnale per attraversare la linea?
2. Una linea lunga  $800 \text{ m}$  ha:  $r = 21 \frac{\Omega}{\text{km}}$ ;  $l = 3,5 \frac{\text{mH}}{\text{km}}$ ;  $c = 12 \frac{\text{nF}}{\text{km}}$ ;  $g = 72 \frac{\mu\Omega^{-1}}{\text{km}}$ . Il segnale ha ampiezza di  $15 \text{ V}$  e frequenza di  $50 \text{ kHz}$ . Determinare il modello e verificare se soddisfa la condizione di Heaviside. Si chiede poi: il calcolo delle costanti secondarie, della lunghezza d'onda, della velocità di trasmissione e del tempo che impiega il segnale per attraversare la linea. Calcolare anche il livello, in  $\text{dB}_m$ , del segnale in entrata ed in uscita e l'attenuazione.
3. Un cavo elettrico bifilare lungo  $1,2 \text{ km}$ , funzionante in regime di onda progressiva, alla frequenza di  $400 \text{ kHz}$ , presenta impedenza caratteristica di  $100 \Omega$  e costante di propagazione pari a:  $\gamma = (0,087 + j12,5) \text{ km}^{-1}$ . Sapendo che il livello del segnale immesso è di  $18 \text{ dB}_m$ , si chiede: il calcolo della tensione immessa in linea; l'espressione dell'onda diretta; il calcolo della tensione in uscita, del livello del segnale in uscita, dell'attenuazione della linea ( $1 \frac{\text{Np}}{\text{km}} \approx 8,686 \frac{\text{dB}}{\text{km}}$ ); il calcolo delle ampiezze della tensione e della corrente trasferite al ricevitore; si chiede inoltre il calcolo del tempo di propagazione.
4. In una linea senza perdite avente:  $l = 4,2 \frac{\text{mH}}{\text{km}}$ ;  $c = 15 \frac{\text{nF}}{\text{km}}$ , chiusa su un carico di  $600 \Omega$ , si immette un segnale di  $4 \text{ Volt}$  e  $180 \text{ kHz}$ . Determinare: il regime presentato dalla linea; la corrente immessa e la corrispondente potenza in  $\text{dB}_m$ ; l'indice di riflessione; le ampiezze dell'onda riflessa di tensione e di corrente; le ampiezze dei segnali di tensione e di corrente che giungono al ricevitore. Determinare inoltre la tensione totale nei punti in cui c'è interferenza costruttiva e distruttiva ed il  $ROS$ .
5. Una linea è lunga 4 volte la lunghezza d'onda, ed è aperta dal lato del ricevitore. Essa soddisfa la condizione di Heaviside ed è caratterizzata dalle seguenti costanti primarie:  $r = 18 \frac{\Omega}{\text{km}}$ ;  $l = 2,5 \frac{\text{mH}}{\text{km}}$ ;  $g = 64 \frac{\Omega^{-1}}{\text{km}}$ . Il segnale immesso ha ampiezza di  $5 \text{ V}$  e frequenza di  $100 \text{ kHz}$ . Si chiede: il modello, le costanti secondarie; la lunghezza della linea; il tipo di regime; i valori delle onde diretta, riflessa e stazionaria al ricevitore. si chiede poi: Quanti nodi contiene l'onda stazionaria lungo la linea? E quanti ventri? Rappresentare l'onda stazionaria.

# Capitolo 6

## Le trasmissioni via etere

### 6.1 Lo schema a blocchi della trasmissione

Nelle trasmissioni via etere il vettore è un'onda elettromagnetica nel campo delle onde radio o delle microonde. Nelle trasmissioni via etere esiste e deve essere

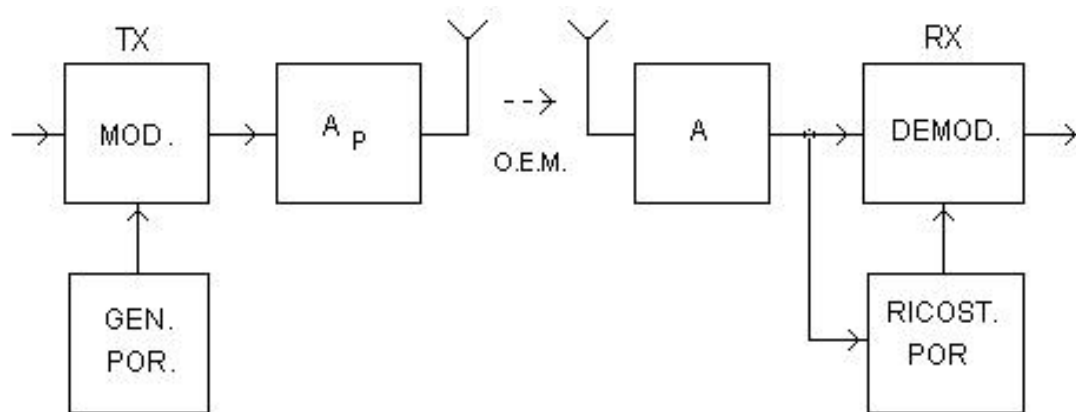


Figura 6.1: Schema a blocchi della trasmissione via etere

risolto sia il problema della natura, che della frequenza, quindi nel trasmettitore ritroviamo sia il generatore di portante che il dispositivo di uscita, composto da un amplificatore di potenza e da un'antenna, con funzione di attuatore.

L'antenna trasmittente, dal punto di vista elettrico, è equivalente ad un *risuonatore elettrico*, cioè ad un circuito risonante. Essa genera un'onda elettromagnetica con la stessa frequenza con cui è fatta risuonare. La forma e la lunghezza dell'antenna, quindi, sono dimensionate in modo che la stessa entri in risonanza in corrispondenza del valore di frequenza dell'onda elettromagnetica che si desidera generare.

L'onda elettromagnetica, trasmettendosi nell'etere perde via via di intensità, giungendo nei pressi del ricevitore con una intensità di campo molto bassa, ma, se la potenza del trasmettitore è adeguata e la distanza non eccessiva, ancora misurabile.

L'antenna ricevente, simile per forma all'antenna trasmittente ed anch'essa equivalente ad un risonatore elettrico, quando viene investita dal campo elettromagnetico su cui è sintonizzata, entra in risonanza e produce in uscita un segnale elettrico con frequenza pari alla frequenza del campo. Tale segnale viene amplificato e demodulato.

## 6.2 Le onde elettromagnetiche

Le **onde elettromagnetiche**, dette anche *radiazioni elettromagnetiche*, sono costituite da *quanti di energia elettromagnetica radiante*. Un singolo quanto, chiamato anche **fotone**, è formato da un *campo elettrico* e da un *campo magnetico* oscillanti alla medesima frequenza, perpendicolari tra loro, perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda e che si irradiano nello spazio ad una velocità pari alla velocità della luce nel vuoto, o di poco inferiore, se lo spazio stesso non è vuoto.

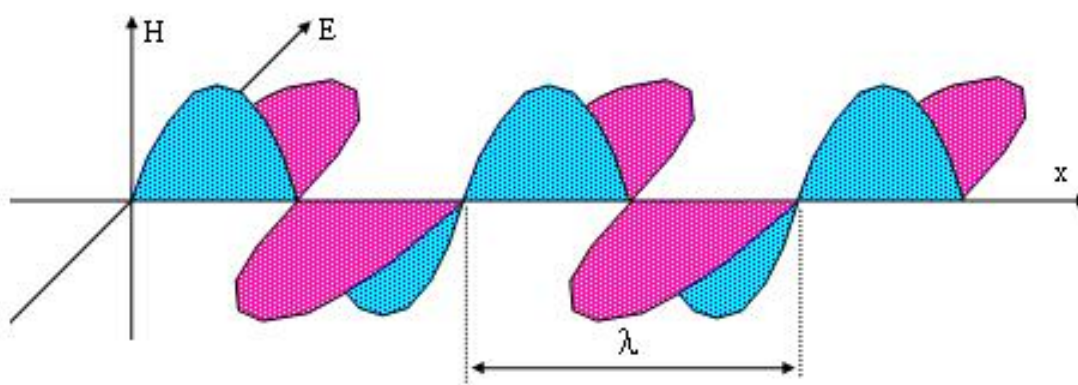


Figura 6.2: Onda Elettromagnetica

Si chiama **lunghezza d'onda**,  $\lambda$ , della radiazione elettromagnetica, *lo spazio percorso dall'onda nel periodo di ripetizione dei campi elettrico e magnetico*. Il prodotto della lunghezza d'onda per la frequenza di oscillazione dei campi elettrico e magnetico, fornisce la velocità di propagazione effettiva:

$$v = \lambda \cdot f$$

A parità di velocità, lunghezza d'onda e frequenza sono inversamente proporzionali, ovvero quando l'una è grande, l'altra è piccola e all'aumentare dell'una, l'altra diminuisce. Il quanto di energia trasportato dall'onda è, però, direttamente proporzionale alla frequenza:

$$E = h \cdot f$$

Quindi le radiazioni più energetiche sono quelle con frequenza più grande, ovvero con lunghezza d'onda più piccola. Esse, in relazione alla materia attraversata, sono più penetranti ed interagiscono con una superficie minore, la cui dimensione è dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda.

Invece, la *densità di potenza*,  $S$  irradiata in un dato punto dello spazio, cioè l'*energia elettromagnetica* trasportata attraverso una *superficie unitaria*, in un *tempo unitario*, dai campi elettrico,  $E$ , e magnetico,  $H$ , è legata ai valori del campo stesso, essendo:

$$S = E_{eff} \cdot H_{eff} = \frac{E \cdot H}{2}$$

Rapportando, poi, i valori di  $E$  e di  $H$ , si ricava, facendo ad esempio l'analisi dimensionale, che tale rapporto ha le dimensioni di una resistenza, la quale viene chiamata: *resistenza dell'etere* ed ha il valore tipico di  $377\Omega$ .

Tutta la gamma delle onde elettromagnetiche è stata suddivisa in fasce con caratteristiche peculiari ordinate per valori di lunghezza d'onda e di frequenza.

- **ONDE RADIO**

La fascia più bassa, meno energetica, è la fascia delle *onde radio*: comprende le onde elettromagnetiche con lunghezza d'onda superiore a  $1\text{metro}$ , ovvero con frequenza fino a  $300\text{MHz}$ .

- **MICROONDE**

La fascia successiva è quella delle *microonde*: comprende le onde elettromagnetiche con lunghezza d'onda da  $1\text{m}$  a  $1\text{mm}$ , ovvero con frequenza fino a  $300\text{GHz}$ . Sono utilizzate soprattutto nelle trasmissioni via satellite, ma anche nei *ponti radio*.

- **INFRAROSSO**

Con lunghezze d'onda inferiori al *millimetro* si entra nell' *infrarosso* , il quale occupa tutto l'intervallo da  $1\text{mm}$  a  $1\mu\text{m}$ , proseguendo oltre fino a circa  $0,7\mu\text{m}$ , al limite della zona della luce visibile. La radiazione di questa fascia è essenzialmente energia termica, data dal calore emesso dai corpi per irraggiamento.

- **LUCE VISIBILE**

La stretta fascia con lunghezze d'onda che vanno da circa  $0,7\mu\text{m}$  a circa  $0,4\mu\text{m}$  corrisponde alla *luce visibile*.

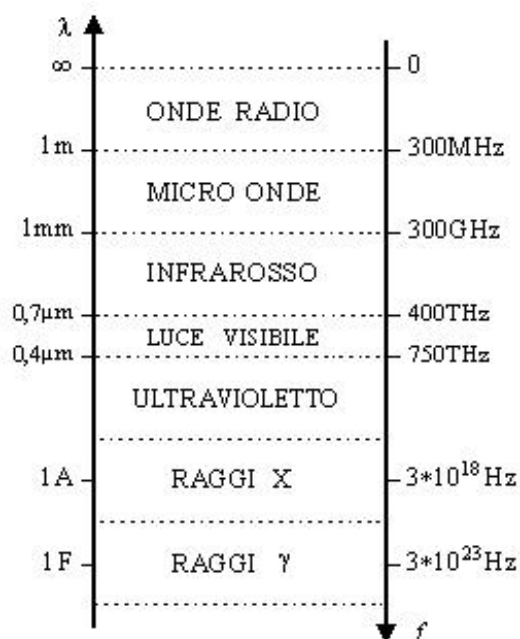


Figura 6.3: Suddivisione delle OEM per fasce di lunghezza d'onda

- **ULTRAVIOLETTO**

Segue la fascia dell'*ultravioletto*, il quale comprende tutte le lunghezze d'onda inferiori a  $0,4\mu m$ , fino all'ordine di grandezza del *nanometro*. I raggi ultravioletti, pericolosi per la vita, sono schermati dalla fascia dell'ozono; in dosi elevate causano ustioni e tumori.

- **RAGGI X**

La fascia successiva, quella dei *raggi X*, è caratterizzata da lunghezze d'onda prossime alle dimensioni degli atomi, espresse in una unità chiamata *Angstrom* ( $1 \text{ angstrom} = 10^{-10}m$ ). I raggi X sono molto pericolosi in quanto interagiscono direttamente con gli atomi e le molecole, spezzando i legami chimici e ionizzando gli atomi. Trovando molteplici applicazioni, dalla spettroscopia, alla medicina.

- **RAGGI  $\gamma$**

A lunghezze d'onda ancora minori, confrontabili con le dimensioni dei nuclei degli atomi, si entra nella fascia della *radiazione nucleare*, ovvero dei *raggi  $\gamma$* . L'unità di misura di riferimento dei nuclei è chiamato *Fermi* ( $1 \text{ Fermi} = 10^{-15}m$ ). I raggi  $\gamma$  sono prodotti dal decadimento delle sostanze radioattive e dalle reazioni nucleari. Essi sono estremamente pericolosi per la salute.

Esistono radiazioni con energia superiore a quella dei raggi  $\gamma$  ? La risposta è affermativa. La terra, si sa, è soggetta ad un flusso continuo di materia e di energia proveniente dal cosmo. La parte di radiazione cosmica che rientra nelle onde elettromagnetiche può effettivamente avere energia ancora più grande dei raggi  $\gamma$  e, quindi, lunghezze d'onda minori. In realtà non vi è un limite massimo alla energia della radiazione elettromagnetica.

### 6.2.1 Le onde radio

Le *onde radio*, corrispondenti alla fascia più bassa delle onde elettromagnetiche, in virtù della loro lunghezza d'onda rilevante vengono generate ed intercettate facilmente con i circuiti radioelettronici. Come vedremo, infatti, le antenne necessarie per generare o per captare le onde radio devono avere dimensioni dello stesso ordine di grandezza della loro lunghezza d'onda e, quindi, le loro dimensioni tendono a diminuire fortemente all'aumentare della frequenza.

Esse sono ulteriormente suddivise nelle seguenti fasce:

- **LF: low frequency**

Le onde radio con lunghezze d'onda maggiori, con frequenze da  $30kHz$  fino a  $300kHz$ , sono chiamate *LF*, od anche *onde lunghe*, per la loro lunghezza d'onda particolarmente elevata. Per produrre o captare le onde lunghe servono antenne particolarmente lunghe.

- **MF: medium frequency**

Da  $300kHz$  fino a  $3MHz$  si hanno invece le *onde medie*, *MF*. All'interno delle onde medie c'è la gamma di frequenze che in Italia è utilizzata per le trasmissioni radio *AM*, in modulazione di ampiezza, la quale va da circa  $520kHz$  a circa  $1620kHz$ . Per le *OM* si usano tipicamente antenne costituite da un filo conduttore avvolto a spirale, con diametro della spirale di qualche decina di centimetri, di solito collegato ad un avvolgimento su nucleo di ferrite. **HF: high frequency**

Da  $3MHz$  fino a  $30MHz$  si hanno le onde corte, *HF*. Sono utilizzate nelle comunicazioni amatoriali ed in ponti radio a frequenze radio. Le *HF* vengono di solito captate con un'antenna a stilo.

- **VHF: very high frequency**

Da  $30MHz$  a  $300MHz$  si ha la fascia delle *VHF*, all'interno della quale c'è la gamma delle trasmissioni radio *FM*, in modulazione di frequenza (da  $88$  a  $108MHz$ ) ed i canali utilizzati nelle trasmissioni televisive *VHF*, dal canale *A* al canale *H1*. In questa fascia si utilizzano le antenne a stilo, soprattutto nella gamma per le trasmissioni *FM*, e, per i canali televisivi, le antenne Yagi.

- **MICROONDE**

Sopra i  $300\text{MHz}$  si entra nel campo delle *microonde*, diviso in tre gamme:  
*UHF*: *ultra high frequency*, fino a  $3\text{GHz}$ , utilizzata per le trasmissioni televisive *UHF*, per le trasmissioni con telefono cellulare, per le trasmissioni *wireless*, ecc. Per questa gamma vengono utilizzate, per le trasmissioni televisive, le antenne Yagi o logperiodiche, mentre per le trasmissioni satellitari, le antenne paraboliche. Infatti alle frequenze di qualche *gigaHz*, caratteristiche delle trasmissioni wireless, la lunghezza d'onda è, quindi, la dimensione dell'antenna, è di una *decina* di *cm*, o meno, per cui l'elemento captante viene inserito nel fuoco di una parabola, allo scopo di intercettare e concentrare una maggiore intensità di campo.

*SHF* *super high frequency*, fino a  $30\text{GHz}$ ;

*EHF*: *extremly high frequency*, fino a  $300\text{GHz}$ .

### Modalità di propagazione delle onde radio

Le onde radio si propagano in modo rettilineo, come la luce, e quindi sono in grado di raggiungere il ricevitore se questo si trova in linea con il trasmettitore, una modalità di trasmissione detta *modalità ottica*.

Le onde radio di frequenza elevata, le onde corte, e le microonde si propagano solo in modalità ottica. Pertanto nei ponti radio ad alta frequenza bisogna che l'antenna trasmittente e quella ricevente siano in vista l'una dell'altra.

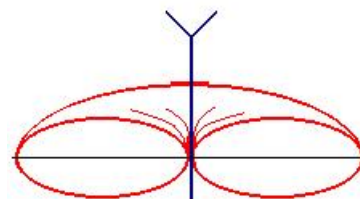
Le onde radio, però, in particolare nelle fasce delle onde lunghe e delle onde medie, si possono propagare anche per *riflessione* tra strati diversi dell'atmosfera, ad esempio tra la stratosfera e la ionosfera. Infatti essendo la loro lunghezza d'onda particolarmente elevata, esse vedono ciascun strato dell'atmosfera come un'unica immensa struttura, con una netta superficie di separazione, avente un indice di riflessione, leggermente diverso da strato a strato. Tali onde, pertanto, sono in grado di raggiungere il ricevitore anche se lo stesso non è in linea con il trasmettitore. Questa modalità di trasmissione può essere sfruttata, però, solo nei sistemi che utilizzano basse frequenze radio, come le trasmissioni in onde lunghe.

Invece, nelle trasmissioni a frequenze elevate, le ripetute riflessioni, su ostacoli fissi o mobili, introducendo echi, hanno l'effetto di *interferire* nelle trasmissioni stesse e di rendere il canale via etere un canale *disturbato*.

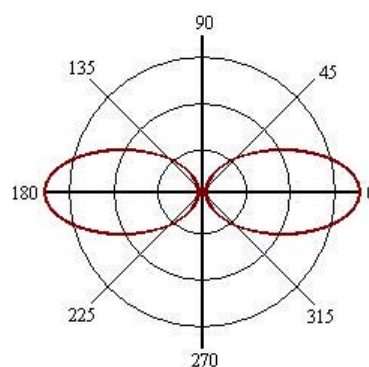
## 6.3 Le antenne - Caratteristiche generali

Come abbiamo già detto *l'antenna è un dispositivo capace di emettere oppure captare le onde radio*.

Si chiama *solido di radiazione* una figura in tre dimensioni, che indica le modalità di irraggiamento di un'antenna. Esso si presenta come una superficie solida, che racchiude l'antenna, e nei cui punti vi è la medesima intensità di campo.

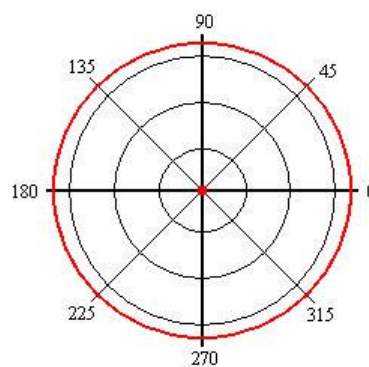


Al lato pratico, anziché a tutto il solido di radiazione, si fa riferimento ad una sua sezione, la quale costituisce un più agevole *diagramma di radiazione* in due dimensioni, che di solito viene tracciato più volte a differenti altezze dal suolo.



Si chiama *radiatore isotropico* un'antenna ideale che irradia il campo elettromagnetico con la medesima intensità in tutte le direzioni.

Il radiatore isotropico è caratterizzato da un solido di radiazione uniforme, le cui superfici di equintensità sono delle superfici perfettamente sferiche. Questa caratteristica è poco utile, in particolare nei ponti radio, in quanto l'energia elettromagnetica dovrebbe essere convogliata solo verso il ricevitore e non dispersa in tutte le direzioni.



Se indichiamo con  $P_i$  la potenza di campo irradiata dall'antenna, alla distanza  $d$  la potenza irradiata si distribuisce uniformemente su una superficie sferica, data da  $4\pi d^2$ , producendo una densità di campo,  $S$ , data dal rapporto tra potenza irradiata e la superficie stessa:

$$S = \frac{P_i}{4\pi d^2}$$

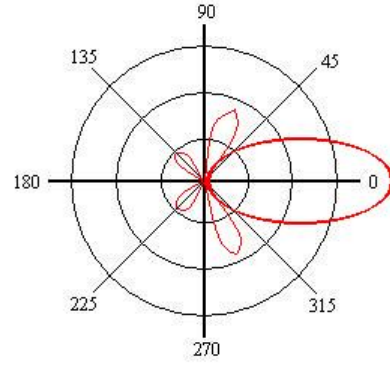


Nelle antenne reali, invece, la densità di campo cambia, a volte anche drasticamente, in funzione della direzione verso la quale l'antenna è puntata.

Tra le antenne reali, si chiama *antenna direttiva* un'antenna capace di concentrare ed irradiare il campo elettromagnetico in una direzione particolare, denominata *direzione di puntamento*.

L'antenna direttiva è caratterizzata da un solido di radiazione con un lobo accentuato nella direzione di irraggiamento.

La *direttività* permette alle antenne reali di irradiare alla medesima distanza con la medesima intensità di campo, impegnando solo una frazione della potenza richiesta ad un radiatore isotropico. Si dice anche che l'antenna direttiva *guadagna* rispetto ad radiatore isotropico.



Più precisamente, considerati un'antenna reale ed un radiatore isotropico, che irradiano la stessa potenza  $P_i$ , si definisce *guadagno d'antenna*,  $G$ , il rapporto tra la densità di potenza  $S$  prodotta dall'antenna reale nel punto del solido di radiazione in cui l'irraggiamento è massimo, e la densità di potenza,  $S_{iso}$ , prodotta dal radiatore isotropico nello stesso punto:

$$G = \frac{S}{S_{iso}} \quad G(dB) = 10 \log \frac{S}{S_{iso}}$$

La conoscenza del guadagno d'antenna ci permette di determinare la densità di potenza nel punto in cui si trova l'antenna ricevente:

$$S = S_{iso} \cdot G = 4\pi d^2 \cdot P_i \cdot G$$

Le antenne riceventi, per il principio di reversibilità, hanno le stesse caratteristiche delle antenne trasmettenti, potendo esse stesse essere direttive ed avere un proprio solido di radiazione e un guadagno d'antenna. Per esse acquista importanza anche il concetto di *area efficace*, definita come *la superficie che deve attraversare il campo elettromagnetico incidente, perchè lo stesso venga captato dall'antenna*.

La conoscenza dell'area efficace,  $A_{eff}$  diventa cruciale per determinare la *potenza di segnale*,  $P_r$ , ricevuta, avendosi:

$$P_r = S \cdot A_{eff}$$

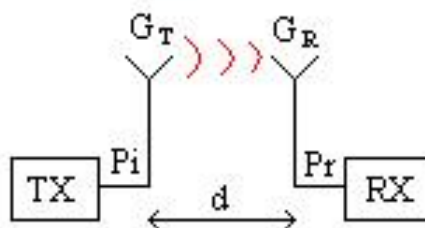
L'area efficace dipende dal quadrato della lunghezza d'onda del campo elettromagnetico trasmesso e dal guadagno d'antenna, secondo la seguente relazione:

$$A_{eff} = G_r \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

Ne consegue che: *all'aumentare della frequenza della radiazione elettromagnetica, l'area efficace di un'antenna diminuisce e quindi diminuisce anche la sua capacità captante.*

Siamo ora in grado di scrivere la *formula fondamentale delle trasmissioni via etere*.

A tale scopo effettuiamo un ponte radio con un trasmettitore caratterizzato da una potenza incidente,  $P_i$ , ed un'antenna trasmittente avente guadagno,  $G_t$ , ed un ricevitore, posto alla distanza  $d$  e caratterizzato da un'antenna ricevente con guadagno,  $G_r$  ed una potenza ricevuta,  $P_r$ .



Per quanto detto, avremo:

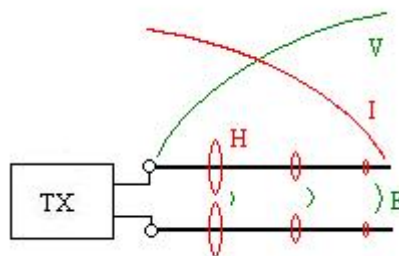
$$\frac{P_r}{P_i} = G_i \cdot G_r \cdot \frac{\lambda^2}{(4\pi d)^2}$$

L'espressione è fondamentale per il dimensionamento del ponte radio, consentendo di dimensionare le antenne ed in particolare l'antenna ricevente, in funzione della densità di campo presente e delle potenze, quella irradiata dal trasmettitore e quella ricevuta.

### 6.3.1 Il dipolo hertziano

Per ottenere un'antenna si parte da uno spezzone di *linea elettrica* in  $\frac{\lambda}{4}$ , con uscita aperta.

Come noto esso opera in regime di *onda stazionaria*, presentando in uscita, un *ventre* di tensione ed un *nodo* di corrente. Essendo, però, la sua lunghezza pari esattamente a mezza lunghezza d'onda, il suo comportamento in entrata è diametralmente opposto, presentando un *nodo* di tensione ed un *ventre* di corrente.



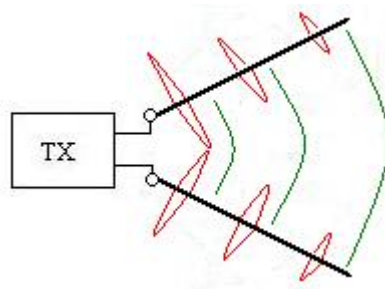
Pertanto la corrente assorbita dal generatore è massima, mentre la tensione è pressoché nulla, è quindi il suo comportamento elettrico è equivalente a quello di un *circuito risonante serie*, caratterizzato da una frequenza di risonanza data da:

$$f_r = \frac{c}{\lambda}$$

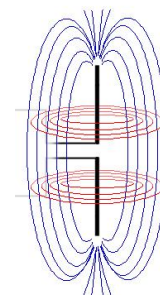
La corrente circolante nei conduttori, come sappiamo, genera nello spazio ad essi circostante un *campo magnetico*, con intensità ad essa proporzionale, e, quindi, massima dal lato dell'entrata, mentre il potenziale produce un corrispondente *campo elettrico*.

Allontanando progressivamente i due conduttori, i campi si disperdono nell'etere con massima intensità nella direzione perpendicolare ai conduttori.

Se percorsi da corrente, i due conduttori acquistano la capacità di ricevere e trasmettere onde elettromagnetiche, nelle direzioni ad essi perpendicolari, alla medesima frequenza di risonanza.



Continuando ad allontanare i conduttori, fino a disporli in direzioni opposte, realizziamo la struttura di base di un'antenna, denominata: *dipolo hertziano* in  $\frac{\lambda}{2}$ , costituita da due conduttori metallici, (alluminio, o acciaio, o rame, ecc), orientati in direzioni diametralmente opposte, per una lunghezza complessiva pari a  $\frac{\lambda}{2}$ .



Il dipolo hertziano non è un radiatore isotropico, dato che il suo solido di radiazione ha un massimo nelle direzioni ad esso perpendicolari, ma disperde comunque il campo a 360°. Dato che lunghezza d'onda e frequenza sono inversamente proporzionali, anche la lunghezza del dipolo hertziano decresce con la frequenza, essendo particolarmente elevata per le *LF* e per le *MF*.

### 6.3.2 Il dipolo marconiano

Disponendo i due bracci del dipolo hertziano in senso verticale, se si dispone di un buon *piano di terra*, il conduttore inferiore può essere agevolmente sostituito dal piano di terra stesso.

In questo modo l'antenna si riduce ad uno *stilo*, costituito da un singolo conduttore di lunghezza  $\frac{\lambda}{4}$ , denominato *dipolo marconiano* in  $\frac{\lambda}{4}$ .



Sono dipoli marconiani le *antenne a stilo*, ad esempio quelle montate sulle auto. Esse irradiano con massima densità di campo nella direzione della linea di terra. Operano bene nel campo delle *HF*, ma possono essere utilizzate anche in gamme di frequenza maggiore.

### 6.3.3 Le antenne Yagi

Per ottenere un'antenna direttiva vengono disposti nella direzione di ricezione, degli spezzoni di conduttore, denominati *direttori*, davanti al dipolo hertziano. Essi sono leggermente più corti e a distanze pari a circa  $0,2\lambda$ . Allo stesso modo, dietro al dipolo viene inserito un ulteriore spezzone di conduttore, leggermente più lungo, il quale funge da riflettore. Ciascun spezzone intercetta una parte del campo e la riflette verso il dipolo, in modo che il campo totale sul dipolo venga intensificato attraverso interferenza costruttiva.



Sono realizzate in questo modo le antenne Yagi per la ricezione delle trasmissioni televisive nelle bande *VHF* ed *UHF*.

Una variante delle antenne Yagi è costituita dalle antenne logperiodiche, nelle quali i direttori hanno lunghezze decrescenti all'aumentare della distanza dal dipolo. Esse son antenne a larga banda, capaci di ricevere l'intera gamma *UHF*, anziché un singolo canale, in quanto, al variare della frequenza, varia l'elemento direttore che entra in risonanza.

### 6.3.4 Le antenne paraboliche

Alle frequenze nel campo delle microonde, le lunghezze d'onda sono particolarmente piccole, per cui, anche se è semplice realizzare le antenne, queste sono caratterizzate da una superficie di intercettazione molto piccola e quindi producono una potenza molto bassa. Per ovviare al problema l'antenna vera e propria, l'illuminatore, viene montata sul fuoco di una parabola.



La parabola consente di intercettare il campo che investe la sua superficie e lo concentra, intensificandolo, nel fuoco, dove viene captato dall'illuminatore. Per evitare che l'illuminatore copra una parte del campo, spesso lo stesso si trova in posizione spostata rispetto al centro ed allora la forma dell'antenna è sagomata secondo una curva leggermente diversa.

# Capitolo 7

## Le trasmissioni con fibra ottica

### 7.1 Lo schema a blocchi della trasmissione

Nelle trasmissioni con fibra ottica il vettore è un fascio di luce visibile o del vicino infrarosso.

*Per la propagazione con fibra ottica vedere il capitolo 2 del tomo Q ed in particolare il paragrafo 12: fibre ottiche; e il paragrafo 14: struttura delle fibre ottiche e propagazione.*

Nelle trasmissioni con fibra ottica, benché esista sia il problema della natura,

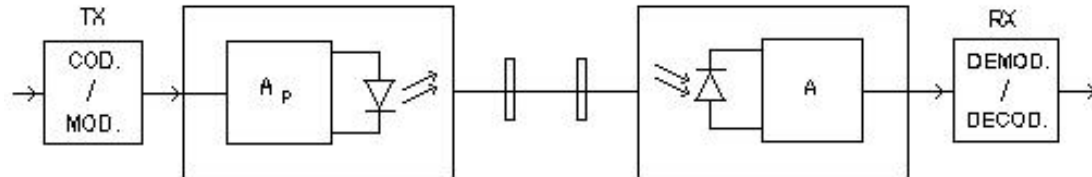


Figura 7.1: Schema a blocchi della trasmissione con fibra ottica

che della frequenza, nel trasmettitore non ritroviamo il generatore di portante, ma solo il dispositivo di uscita, composto da un amplificatore di potenza e da un diodo speciale, con funzione di attuatore.

Per generare il fascio di luce, infatti, il trasmettitore utilizza di solito un diodo laser o un LED. Il diodo sfrutta la propria caratteristica di generare, se alimentato, una radiazione con la frequenza prefissata, quindi consente di risolvere sia il problema della natura che della frequenza. Pertanto non c'è la necessità di generare, a monte dell'attuatore, la portante (la cui frequenza sarebbe peraltro irraggiungibile con un oscillatore elettrico). L'unica cosa che si richiede, è una forma di codifica del segnale, la quale, nella sua forma più semplice è: trasmissione del fascio, se il bit è a 1, non trasmissione del fascio, se il bit è a 0.

Il trasmettitore usa un giunto speciale per consentire l'ingresso del fascio nella fibra.

Con un analogo giunto, il ricevitore estrae il fascio dalla fibra stessa e lo convoglia verso un elemento fotosensibile, di solito un fotodiodo o un fototransistor.

Questi elementi, quando vengono polarizzati, hanno un comportamento differenziato a seconda della loro esposizione alla luce, passando dalla interdizione alla conduzione. Il segnale che si sviluppa ai loro capi, quindi, una volta amplificato e decodificato, riproduce l'informazione trasmessa.

## 7.2 La luce

Come già specificato, la luce costituisce la fascia di onde elettromagnetiche che va da circa  $0,7\mu m$  a circa  $0,4\mu m$ . Al variare della lunghezza d'onda, all'interno di questo intervallo, la luce stessa è percepita con un colore diverso, che varia dal rosso, vicino a  $0,7\mu m$ , quindi arancione, giallo, verde, azzurro, fino al violetto, vicino a  $0,4\mu m$ . L'occhio umano percepisce la luce attraverso due serie di cellule specializzate: i *coni* e i *bastoncelli*. I bastoncelli sono sensibili alla intensità luminosa, ma non consentono di distinguere i colori. I coni invece si suddividono in tre gruppi: il primo sensibile alla luce verde, il secondo al rosso ed il terzo al blu. La sensazione luminosa è massima in corrispondenza del verde, cioè nella zona centrale dello spettro luminoso, intorno a  $0,55\mu m$ . La quantità di luce emessa da una sorgente viene misurata di solito facendo riferimento alla *intensità luminosa*, definita come *l'energia luminosa emessa dalla sorgente nell'unità di tempo all'interno di un angolo solido unitario*. L'intensità luminosa si misura in candele, *cd*, la quale fa parte delle unità di misura fondamentali del Sistema Internazionale.

### 7.2.1 Riflessione

Si ha la riflessione quando un fascio di luce incide la superficie di separazione tra due mezzi diversi. Ovvio poi che più la superficie è liscia, come nello specchio, più il fenomeno è rilevante. Ciò che interessa sapere nella riflessione è: dato un raggio luminoso incidente ad una certa superficie, in che direzione emerge il raggio riflesso? indicato con  $\varphi_i$  l'angolo di incidenza (l'angolo formato dal raggio incidente con la normale alla superficie) e con  $\varphi_{rf}$  l'angolo di riflessione (l'angolo formato dal raggio riflesso con la normale), la legge della riflessione afferma che l'angolo di riflessione deve essere uguale all'angolo di incidenza:

$$\varphi_{rf} = \varphi_i$$

Questa legge, nota già agli antichi, è stata spiegata adducendo un principio, detto della *minima distanza*, secondo il quale la luce si propaga tra due punti  $A$  e  $B$  di uno stesso mezzo, scegliendo il percorso più breve.

### 7.2.2 Rifrazione

Oltre al fenomeno della riflessione, nella superficie di separazione tra due mezzi diversi si può avere anche il fenomeno della rifrazione, quando una parte del fascio incidente si propaga all'interno del secondo mezzo. Quando la luce si propaga in un mezzo diverso dal vuoto, la sua velocità diminuisce, passando dal valore che aveva nel vuoto,  $c$ , al valore,  $v < c$ , che assume nel mezzo. Si chiama *indice di rifrazione*,  $n$ , il rapporto tra tali velocità, cioè si pone:

$$n = \frac{c}{v}$$

Indicato con  $\varphi_r$  l'*angolo di rifrazione*, corrispondente all'angolo formato dal raggio rifratto con la normale alla superficie di rifrazione, la legge della rifrazione, nota come *legge di Snell*, dal nome del suo scopritore, afferma che *i seni degli angoli di incidenza e di rifrazione stanno tra loro come l'inverso dei rispettivi indici di rifrazione*:

$$\frac{\sin \varphi_i}{\sin \varphi_r} = \frac{n_2}{n_1}$$

La legge della rifrazione era sconosciuta agli antichi, ed è stata spiegata per la prima volta da Fermat adducendo il principio del *minimo tempo* secondo il quale la luce si propaga tra due punti  $A$  e  $B$  di due mezzi tra loro diversi attraverso il percorso che richiede il tempo più breve. Esso è anche il percorso più breve soltanto se i due mezzi sono uguali, altrimenti non lo è.

La luce si comporta come se *sapesse in anticipo* quale percorso convenga prendere per arrivare prima. Così, se il secondo mezzo è più denso ed ostacola maggiormente la luce, costringendola ad avanzare con una velocità minore, allora la luce fa un percorso più lungo nel primo mezzo, mentre nel secondo si tiene più vicina alla normale.

Viceversa, se è il primo mezzo ad essere più denso e ad ostacolare maggiormente il moto della luce, allora la luce abbrevia il tragitto nel primo mezzo e lo allunga nel secondo, dove si allontana dalla normale.

Se, però, si costringe il raggio incidente ad assumere anche in questo caso un angolo di incidenza elevato, può capitare che l'angolo di rifrazione diventi così grande da essere in teoria superiore a  $90^\circ$ ! In questa situazione è ovvio che non c'è più il raggio rifratto e l'unico fenomeno che si verifica è la riflessione. Si ha cioè la *riflessione totale* del fascio. Supposto:  $n_2 < n_1$  essa si ha quando l'angolo di



incidenza è maggiore dell' angolo limite:

$$\varphi_i > \varphi_{iL} = \arcsen \frac{n_2}{n_1}$$

Questo fenomeno è sfruttato nelle telecomunicazioni con fibre ottiche.

## 7.3 Le fibre ottiche

Le *fibre ottiche* sono costituite da una fibra di vetro, normalmente silice purissima, fatta di due parti:

La parte più interna, dove si propaga la luce è chiamata **core**, o *nucleo*, ed ha un indice di rifrazione leggermente maggiore della più esterna, detta **cladding**, o *mantello*.

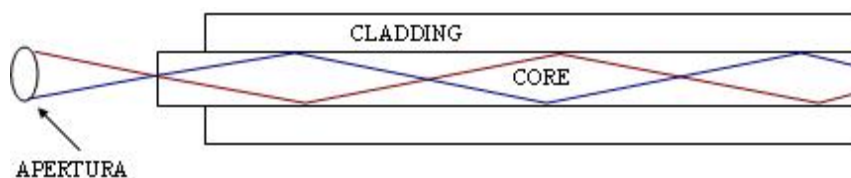


Figura 7.2: Fibra Ottica

La luce viene fatta entrare nella fibra entro con un angolo di accettazione molto piccolo, in modo che la riflessione del fascio con le pareti del core sia totale. Con questa condizione la luce stessa si propaga all' interno del core per riflessioni successive e le uniche perdite sono quelle dovute alle imperfezioni della fibra stessa. Le fibre ottiche si dividono nei seguenti tipi

### 1. Fibre step index multimodali

Il core ha dimensione di circa  $100\mu m$ , mentre l' indice di rifrazione è costante nel core stesso e subisce una diminuzione netta, *step*, nel cladding.

L' energia luminosa del fascio incidente si distribuisce in un numero discreto di configurazioni, dette *modi* che si propagano con angoli leggermente diversi, per cui alcuni arrivano all' estremo della fibra prima degli altri e l' informazione trasportata dal fascio nel suo complesso subisce una distorsione di fase.

Questo fenomeno pone un limite alla lunghezza complessiva di una tratta con fibra ottica di questo tipo.

### 2. Fibre step index monomodali

In queste fibre il diametro del core è ridotto ad una dimensione minore di  $10\mu m$ . Con questa dimensione l' energia luminosa del fascio si propaga in

un singolo modo. Le dimensioni ridotte, però, e l'angolo di accettazione basso, fanno sì che sia difficile interfacciarle con la sorgente fotoemittente, che deve essere anche rigorosamente monocromatica. Si risolve il problema utilizzando come dispositivo attuatore un diodo laser.

### 3. **Fibre graded index**

In queste fibre il core dimensioni come nelle step index multimodali, mentre l'indice di rifrazione diminuisce gradualmente andando dal centro del core al cladding e nel cladding resta costante.

L'energia luminosa si distribuisce anche nelle graded index in un numero discreto di modi, ma essi sono ora costretti, dal particolare profilo dell'indice di rifrazione, a propagarsi con tragitti elicoidali, che li porta ad arrivare praticamente tutti allo stesso tempo, riducendo drasticamente l'effetto della dispersione modale.

# Capitolo 8

## Modulazioni e codifiche

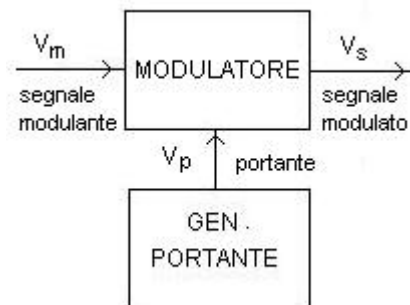
### 8.1 Le modulazioni analogiche

#### 8.1.1 La modulazione

Abbiamo detto che la *modulazione* è una tecnica utilizzata nella trasmissione dei segnali, per traslare la gamma di frequenze del segnale da trasmettere, solitamente molto bassa, in modo da farla rientrare nella banda del canale di comunicazione. Abbiamo anche detto che si chiama *modulatore* il dispositivo che esegue la modulazione.

Al *modulatore*, sono applicati: il segnale da trasmettere, detto anche *segnale modulante*, di bassa frequenza, ed il *segnale portante*, di alta frequenza, generato localmente dal blocco generatore di portante.

Il modulatore, in base all'andamento del segnale modulante, modifica uno dei parametri della portante e produce il *segnale modulato*, il quale contiene al proprio interno le informazioni del segnale modulante.



**Definizione 21.** *Modulare significa modificare istante per istante uno dei parametri della portante, secondo l'andamento temporale del segnale modulante.*

La forma della portante dipende dal tipo di trasmissione utilizzato: analogica o numerica.

Nelle trasmissioni analogiche, la portante è un segnale alternato sinusoidale di alta frequenza. Nel seguito, assumeremo, per una consuetudine delle telecomunicazioni, che il suo andamento sia di tipo coseno, anziché di tipo seno.

Essendo i parametri della portante, sui quali può essere effettuata la modulazione, l'ampiezza, la frequenza, o la fase, abbiamo fondamentalmente tre tipi di modulazione: di *ampiezza*, di *frequenza* e di *fase*.

Le trasmissioni radio in modulazione d'ampiezza, *AM*, ed in modulazione di frequenza, *FM*, ne sono un esempio.

### 8.1.2 La modulazione d'ampiezza

Nella modulazione d'ampiezza viene modificata l'ampiezza della portante con la stessa legge del segnale modulante.

La visione grafica e spettrale è riportata in figura 8.1.

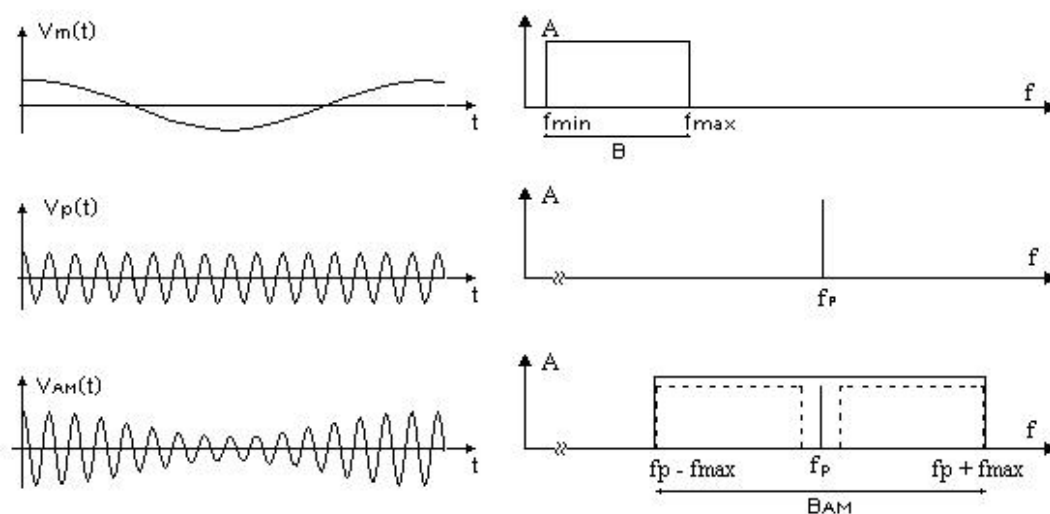


Figura 8.1: Visione grafica e spettrale della modulazione di ampiezza

Il *segnale modulante* è un segnale di bassa frequenza, il quale occupa la banda di frequenze che va dal valore minimo  $f_{min}$  al valore massimo  $f_{max}$ . Nel caso di un segnale vocale, cioè del segnale corrispondente al parlato, la gamma di frequenze va da 300 a 3400 *Hz*. Lo spettro del segnale può avere una forma qualsiasi, dato che non si conosce a priori il contenuto del segnale. Per questo motivo esso viene rappresentato convenzionalmente, senza alcun riferimento al contenuto armonico effettivo, se non per il valore minimo ed il valore massimo della frequenza.

La *portante* è un segnale alternato cosinusoidale con parametri fissi di ampiezza, frequenza e fase, quindi ha uno spettro caratterizzato da un'unica riga in corrispondenza di  $f_p$ .

La linea che congiunge i punti di massima ampiezza del segnale, viene chiamata *linea di inviluppo* del segnale. Per la portante, che ha ampiezza costante, questa

linea è una retta parallela all'asse del tempo.

Nel *segnale modulato in ampiezza* la frequenza e la fase restano fisse, pari a quelle della portante, mentre l'ampiezza varia nel tempo. Nel grafico si vede, infatti, che la linea di inviluppo del segnale modulato ha forma corrispondente alla forma del segnale modulante.

Le informazioni relative al segnale modulante sono contenute proprio nel profilo della linea di inviluppo.

Si osserva, in particolare, che l'ampiezza del segnale modulato si discosta dall'ampiezza della portante di una quantità *positiva*, quando il segnale modulante è *positivo*, e *negativa* quando invece il segnale modulante è *negativo*. Lo scostamento in ampiezza viene espresso attraverso un parametro denominato *deviazione di ampiezza*.

**Definizione 22.** Si definisce deviazione di ampiezza,  $\Delta A$ , lo scostamento massimo, in più od in meno, dell'ampiezza del segnale modulato dall'ampiezza del segnale di portante.

Mentre in linea teorica lo scostamento *in più* può essere di qualunque entità, è pacifico, invece, che lo scostamento *in meno*, non può essere maggiore del valore di ampiezza della portante, altrimenti si determina una condizione di *sovramodulazione*. La deviazione di ampiezza viene di solito espressa in unità relative, introducendo un indice, chiamato *indice di modulazione*.

**Definizione 23.** Si definisce indice di modulazione di ampiezza,  $m$ , la deviazione di ampiezza del segnale modulato,  $\Delta A$ , rapportata all'ampiezza della portante,  $A_p$ :

$$m = \frac{\Delta A}{A_p}$$

A seconda del valore assunto da  $m$ , si ha:

- $m = 0$  : assenza di modulazione
- $0 < m < 1$  : modulazione parziale, con una profondità compresa tra lo 0% ed il 100%. La deviazione di ampiezza è minore dell'ampiezza della portante.
- $m = 1$  : modulazione totale, con profondità del 100%. La deviazione di ampiezza è uguale all'ampiezza della portante.
- $m > 1$  : sovramodulazione.

Poiché il segnale modulato non è più perfettamente alternato il suo spettro non corrisponde ad un'unica riga, ma ad un pacchetto di righe, parte sopra, parte sotto il valore di frequenza della portante. La parte dello spettro che sta sopra

è chiamata *laterale superiore*, mentre la parte che sta sotto è chiamata *laterale inferiore*.

Si dimostra che ad ogni riga del segnale modulante corrispondono due righe nello spettro del segnale modulato, una sopra e l'altra sotto il valore della portante, così che la laterale superiore (e in senso speculare anche la laterale inferiore), ha la identica densità spettrale del segnale modulante. È così risolto il problema della traslazione della frequenza.

La occupazione di banda complessiva del segnale modulato è funzione del valore di frequenza massima del segnale modulante, avendo:

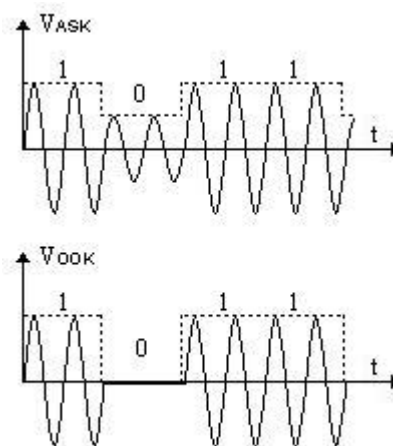
$$B_{AM} = 2 \cdot f_{max}$$

### La codifica ASK

La modulazione di ampiezza fatta con un segnale numerico, viene denominata *codifica ASK: Amplitude Shift Key* ( *Chiave a Slittamento di Ampiezza*).

Per il tempo in cui in segnale numerico è a 0 *logico* viene trasmessa la portante con un valore di Ampiezza  $A_0$ , mentre per il tempo in cui in segnale numerico è a 1 *logico* viene trasmessa la portante con un valore di ampiezza  $A_1$ .

Rientra nella ASK, come caso particolare, la commutazione *ON – OFF*, denominata *codifica OOK (On Off Key)*, nella quale si pone:  $A_0 = 0$  e  $A_1 = A_p$ : il codificatore lascia passare la portante (*ON*), quando il dato ha valore logico 1, mentre la blocca completamente (*OFF*), quando invece il dato ha valore logico 0.



### 8.1.3 La modulazione di frequenza

Nella modulazione di frequenza, la portante è un segnale sinusoidale di elevata frequenza.

La frequenza della portante viene fatta variare con la stessa legge del segnale modulante.

La visione grafica e spettrale è riportata in figura 8.2. Come già osservato, il *segnale modulante* è un segnale *analogico* di *bassa frequenza*, di forma qualsiasi, il quale occupa la banda di frequenze che va dal valore minimo  $f_{min}$  al valore massimo  $f_{max}$ . Lo spettro è rappresentato convenzionalmente, con riferimento alla banda

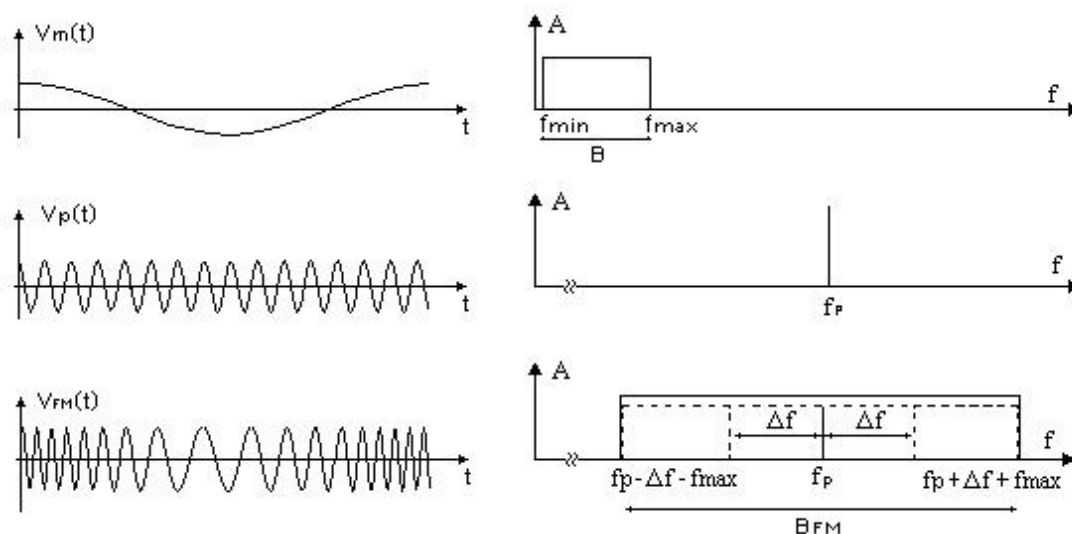


Figura 8.2: Visione grafica e spettrale della modulazione di frequenza

di frequenze occupata dal segnale.

La portante resta un segnale alternato sinusoidale con parametri fissi di ampiezza, frequenza e fase, quindi con uno spettro caratterizzato da un'unica riga in corrispondenza di  $f_p$ .

Nel segnale modulato in frequenza la ampiezza resta costante, mentre la frequenza varia nel tempo. Essa *aumenta*, rispetto al valore della portante, negli istanti in cui il segnale modulante è *positivo*, raggiungendo il valore massimo di scostamento in corrispondenza del valore di picco di  $V_m$ , mentre *diminuisce* quando invece il segnale modulante è *negativo*, raggiungendo il valore minimo di deviazione quando  $V_m$  è nel picco negativo.

Nel grafico si vede, infatti, che, quando il segnale modulante è positivo il segnale modulato presenta variazioni più rapide e compie più cicli, mentre, quando il segnale modulante è negativo, esso presenta variazioni più lente e compie meno cicli. Lo scostamento in frequenza viene espresso attraverso un parametro denominato *deviazione di frequenza*.

**Definizione 24.** Si definisce deviazione di frequenza,  $\Delta f$ , del segnale modulato in frequenza la quantità corrispondente allo scostamento massimo, in più od in meno, della frequenza del segnale modulato dalla frequenza della portante.

Poiché il segnale modulato ha frequenza variabile, da  $f_p - \Delta f$  a  $f_p + \Delta f$ , le informazioni relative al segnale modulante, inserendosi su tali valori, danno luogo, nello spettro, ad un contenuto armonico che si distribuisce in tutta la gamma di frequenze che vanno da  $f_p - \Delta f - f_{mMAX}$  a  $f_p + \Delta f + f_{mMAX}$ .

Si ottiene lo spettro complessivo raffigurato schematicamente in figura, dal quale si desume la larghezza della banda occupata con la formula seguente, dovuta a Carson:

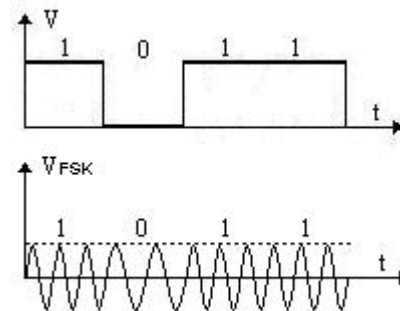
$$B_{FM} = 2 \cdot (\Delta f + f_{mMAX})$$

### La codifica FSK

La modulazione di frequenza fatta con un segnale numerico, viene denominata *codifica FSK*: *Frequency Shift Key* ( *Chiave a Slittamento di Frequenza* ).

Per il tempo in cui in segnale numerico è a 0 *logico* viene trasmessa una portante con un valore di frequenza  $f_0$ , mentre per il tempo in cui in segnale numerico è a 1 *logico* viene trasmessa una portante con un valore di frequenza  $f_1$ .

I due valori di frequenza sono scelti in modo che diano un rapporto prestabilito.



Inoltre sono ottenuti a partire da un unico segnale a frequenza molto maggiore in modo che vi sia correlazione tra le loro fasi, prevenendo così la formazione di un salto di fase, in particolare, nel delicato momento della commutazione dall'una all'altra.

#### 8.1.4 La modulazione d fase

Nella modulazione di fase, la portante è un segnale sinusoidale di elevata frequenza, la cui fase viene fatta variare in modo direttamente proporzionale al valore istantaneo del segnale modulante.

La vediamo graficamente, nel caso in cui anche la modulante sia sinusoidale, in figura 8.3. Il *segnale modulante* è, ancora una volta, un segnale *analogico* di *bassa frequenza*, con forma qualsiasi, il quale occupa la banda di frequenze che va dal valore minimo  $f_{min}$  al valore massimo  $f_{max}$ , con lo spettro, convenzionalmente rappresentato, di figura.

La *portante* resta un segnale alternato cosinusoidale con parametri costanti di ampiezza, frequenza e fase, quindi con uno spettro caratterizzato da un'unica riga posta in corrispondenza di  $f_p$ .

Il *segnale modulato in fase*,  $V_{PM}$ , ha ampiezza costante e fase che devia rispetto al valore della portante: quando il segnale modulante è *positivo* i picchi del segnale modulato sono in *anticipo* rispetto ai picchi della portante, raggiungendo il valore massimo di anticipo in corrispondenza del valore di picco di  $V_m$ , mentre, quando



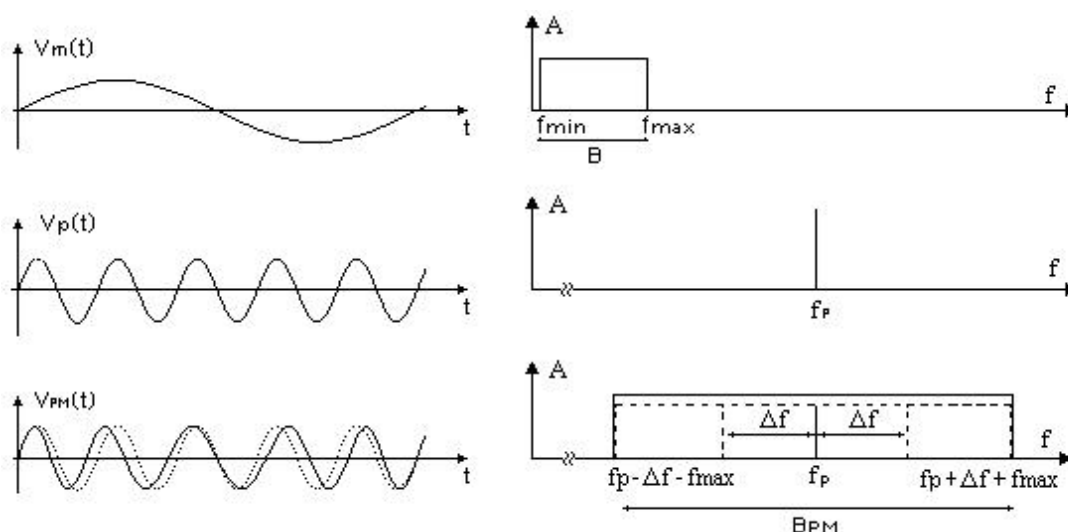


Figura 8.3: Visione grafica e spettrale della modulazione di fase

il segnale modulante è *negativo* essi sono in *ritardo* rispetto ai picchi della portante. Lo scostamento di fase viene espresso attraverso un parametro denominato *deviazione di fase*.

**Definizione 25.** Si definisce deviazione di fase,  $\Delta\alpha$ , del segnale modulato in fase la quantità corrispondente alla la massima deviazione di fase del segnale modulato dalla fase istantanea della portante.

Se si osserva il grafico, ci si accorge facilmente che il fatto che la fase devii rispetto al valore della portante, comporta che localmente cicli diversi del segnale hanno durate diverse, ovvero che anche la frequenza è obbligata a subisce una variazione. Le modulazioni di frequenza e di fase, infatti, non sono affatto indipendenti, ma strettamente correlate, di modo che la modulazione di frequenza comporta anche una modulazione di fase e viceversa.

Pertanto, associato al parametro  $\Delta\alpha$  c'è un parametro  $\Delta f$  e viceversa.

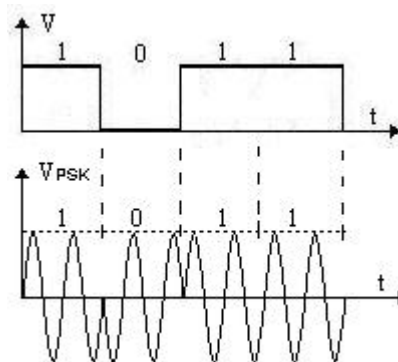
Quindi nel segnale modulato in fase anche la frequenza varia, da  $f_p - \Delta f$  a  $f_p + \Delta f$  e nel suo spettro c'è contenuto armonico in tutta la gamma di frequenze che va da  $f_p - \Delta f - f_{mMAX}$  a  $f_p + \Delta f + f_{mMAX}$ . Si ottiene lo spettro complessivo raffigurato schematicamente in figura, dal quale si desume la larghezza della banda occupata con la formula seguente, dovuta a Carson:

$$B_{PM} = 2 \cdot (\Delta f + f_{mMAX})$$

### La codifica PSK

La modulazione di fase fatta con un segnale numerico, viene denominata *codifica PSK: Phase Shift Key* ( *Chiave a Slittamento di Fase*).

Per il tempo in cui il segnale numerico è a 0 logico viene trasmessa la portante con un valore di fase  $\varphi_0$ , mentre per il tempo in cui il segnale numerico è a 1 logico viene trasmessa la portante con valore di fase  $\varphi_1$ . Nell'esempio, si è posto:  $\varphi_0 = 0$  e  $\varphi_1 = 180^\circ$ . Osservando la forma del segnale modulato, si vede che esso presenta una inversione di fase di  $180^\circ$ , rispetto alla portante, ogni volta che il segnale dati assume il valore logico 0.



### 8.1.5 Espressioni matematiche dei segnali

#### Espressione del segnale modulante

Il segnale modulante è un segnale di bassa frequenza, che può avere una forma qualsiasi. Matematicamente possiamo solo dire che è una funzione del tempo:

$$V_m = V_m(t)$$

Considerando che, in generale, è di tipo aperiodico, possiamo utilizzare la trasformata di Fourier come strumento matematico di analisi e scomporlo nelle sue componenti, delle quali possiamo invece dedurre l'espressione matematica. Infatti una generica componente,  $V_{m1}$ , è un segnale alternato di tipo coseno, di frequenza,  $f_m$ , e di ampiezza  $A_m$ ; la sua espressione matematica è allora:

$$V_{m1}(t) = A_m \cdot \cos(w_m \cdot t)$$

#### Espressione del segnale di portante

Il segnale di portante, nelle modulazioni analogiche, è un segnale di alta frequenza, di tipo coseno, di frequenza,  $f_p$ , e di ampiezza  $A_p$ .

In rappresentazione vettoriale, figura 8.4a, il vettore rappresentativo del segnale descrive un *movimento circolare uniforme*, con *velocità angolare costante*, data dal rapporto tra l'angolo percorso al tempo  $t$  ed il tempo  $t$  stesso:

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

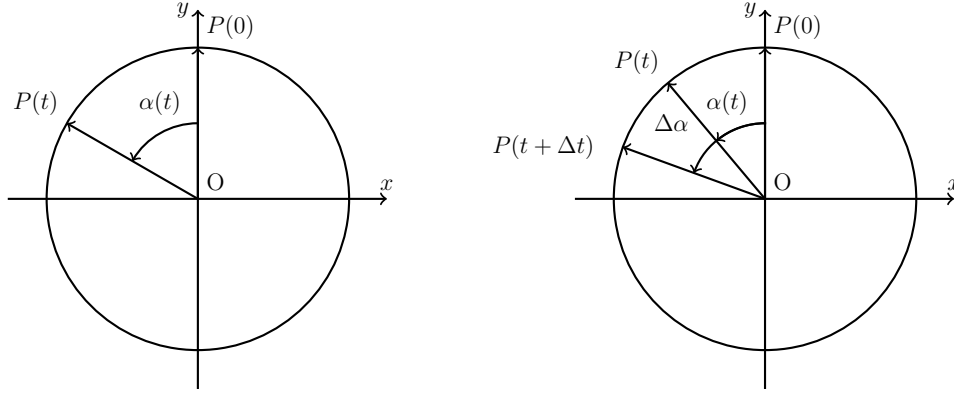


Figura 8.4: Rappresentazione vettoriale

Invertendo questa relazione si ricava l'espressione della *fase* del segnale al tempo  $t$ :

$$\alpha(t) = \omega \cdot t$$

Matematicamente, quindi, il segnale di portante è una funzione del tempo, la cui espressione matematica è:

$$V_p = V_p(t) = A_p \cdot \cos(w_p \cdot t)$$

### Espressione del segnale modulato in ampiezza

Il segnale modulato in ampiezza,  $V_{AM}(t)$ , è ottenuto modificando l'ampiezza della portante con la legge del segnale modulante. L'ampiezza del segnale modulato, pertanto, è una funzione del segnale modulante, la quale si ottiene aggiungendo all'ampiezza della portante un termine proporzionale al segnale modulante:

$$A(t) = A_p + k_m \cdot V_m(t)$$

Nell'espressione il parametro,  $k_m$ , è una costante di proporzionalità. La espressione matematica del segnale modulato in ampiezza, pertanto, è la seguente:

$$V_{AM}(t) = A(t) \cdot \cos(w_p \cdot t) = [A_p + k_m \cdot V_m(t)] \cdot \cos(w_p \cdot t)$$

La frequenza e la fase sono quelle della portante. Esse continuano ad essere legate tra loro dalla medesima relazione:  $\alpha(t) = \omega \cdot t$

### Deviazione di ampiezza e dell'indice di modulazione

Per ricavare l'espressione dei parametri, si considera il solo effetto di una generica componente,  $V_{m1} = A_m \cdot \cos(w_m \cdot t)$ , del segnale modulante. L'espressione

matematica del segnale modulato in ampiezza diventa:

$$V_{AM}(t) = [A_p + k_m \cdot A_m \cdot \cos(w_m \cdot t)] \cdot \cos(w_p \cdot t)$$

La *deviazione di ampiezza*,  $\Delta A$ , è, in base alla definizione, lo scostamento massimo dell'ampiezza del segnale modulato dal segnale di portante.

Essendo  $\cos(w_m \cdot t)$  compreso tra  $-1$  e  $1$ , la massima variazione di ampiezza del segnale modulato è:

$$\Delta A = k_m \cdot A_m$$

L'*indice di modulazione*,  $m$ , è, allora:

$$m = \frac{\Delta A}{A_p} = \frac{k_m \cdot A_m}{A_p}$$

### Dimostrazione dello spettro

Abbiamo detto che lo spettro del segnale modulato in ampiezza è costituito dalla riga della portante e dalle due laterali, all'interno di ciascuna delle quali si trova una riga per ogni riga del segnale modulante. Ci proponiamo di provare questo assunto per una generica componente del segnale modulante. A tale scopo riprendiamo l'espressione del segnale modulato in ampiezza con una componente cosinusoidale:

$$V_{AM}(t) = [A_p + k_m \cdot A_m \cdot \cos(w_m \cdot t)] \cdot \cos(w_p \cdot t)$$

e svolgiamo il prodotto. Otteniamo:

$$V_{AM}(t) = A_p \cdot \cos(w_p \cdot t) + k_m \cdot A_m \cdot \cos(w_m \cdot t) \cdot \cos(w_p \cdot t)$$

Il segnale modulato risulta intanto costituito da due termini, il primo dei quali è la portante stessa. Allora le due laterali devono essere contenute nel secondo termine.

Osserviamo anche che il secondo termine è costituito dal prodotto di due coseni; per tale motivo viene chiamato *prodotto di modulazione*.

Ricordando che, dalla trigonometria, risulta:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

Posto:  $\alpha = w_p \cdot t$  e  $\beta = w_m \cdot t$  otteniamo:

$$V_{AM}(t) = A_p \cdot \cos(w_p \cdot t) + \frac{k_m \cdot A_m}{2} \cdot \cos[(w_p + w_m) \cdot t] + \frac{k_m \cdot A_m}{2} \cdot \cos[(w_p - w_m) \cdot t]$$

L'espressione di  $V_{AM}$  è così ricondotta a tre componenti armoniche:

- la portante stessa;
- una componente di laterale inferiore, a frequenza  $(f_p - f_m)$ ;
- una componente di laterale superiore, a frequenza  $(f_p + f_m)$ .

cioè allo spettro di figura 8.5.

L' ampiezza delle laterali è

$$A_L = \frac{k_m \cdot A_m}{2}$$

quindi, corrispondente a metà della deviazione di ampiezza. Ricordando poi che:

$$\frac{k_m \cdot A_m}{A_p} = m$$

si ha anche:

$$A_L = \frac{m \cdot A_p}{2}$$

Alla massima modulazione, l'ampiezza delle righe laterali è metà di quella della portante.

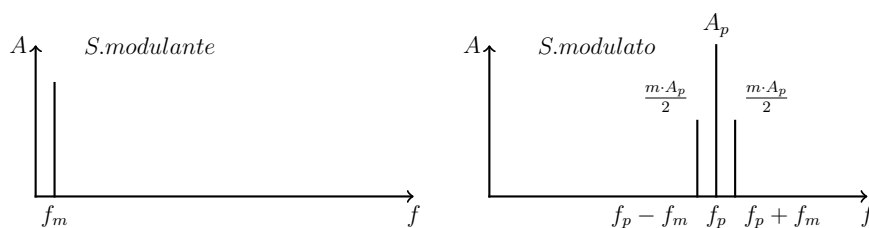


Figura 8.5: Spettro del segnale  $AM$  con modulante cosinusoidale

Nel caso generale  $V_{AM}$  comprende molte componenti armoniche. Ripetendo, per ogni componente spettrale, il procedimento fatto precedentemente, si conclude che ognuna di esse dà luogo ad una componente nella banda laterale inferiore, a frequenza e ad una componente nella banda laterale superiore, come si voleva provare.

### Espresssione del segnale modulato in fase

Il segnale modulato in fase,  $V_{PM}(t)$ , è ottenuto modificando la fase della portante con la legge del segnale modulante. La fase, ora, è una funzione del segnale modulante:

$$\alpha(t) = \alpha(portante) + k_\alpha \cdot V_m(t) = \omega_p \cdot t + k_\alpha \cdot V_m(t)$$

La espressione matematica del segnale modulato in fase, pertanto, è la seguente:

$$V_{PM}(t) = A_p \cdot \cos[\alpha(t)] = A_p \cdot \cos[\omega_p \cdot t + k_\alpha \cdot V_m(t)]$$

Facendo riferimento alla rappresentazione vettoriale di figura 8.4b, notiamo che, ora, l'ampiezza resta quella della portante, ma il movimento del vettore rappresentativo non è più uniforme, cioè non avviene più con velocità costante. Per trovare la velocità angolare al generico istante  $t$ , dobbiamo rapportare tra loro non più i valori di fase relativi a quell'istante, ma i *valori incrementali di fase*:

$$\omega(t) = \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$$

Facendo il limite del rapporto incrementale, per  $\Delta t \rightarrow 0$ , si ottiene che la velocità angolare è data dalla derivata di  $\alpha$  fatta rispetto al tempo:

$$\omega(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

Si ottiene:

$$\omega_{PM}(t) = \frac{d[\omega_p \cdot t + k_\alpha \cdot V_m(t)]}{dt} = \omega_p + k_\alpha \frac{d[V_m(t)]}{dt}$$

### Espressione del segnale modulato in frequenza

Il segnale modulato in frequenza,  $V_{FM}(t)$ , è ottenuto modificando la frequenza dalla portante con la legge del segnale modulante. La velocità angolare, ora, è una funzione del segnale modulante:

$$\omega_{FM}(t) = \omega_p + k_f \cdot V_m(t)$$

Ci aspettiamo che la modulazione di frequenza induca anche una modulazione di fase, per cui la fase del segnale modulato sarà in generale una funzione del tempo.

Facendo riferimento alla rappresentazione vettoriale di figura 8.4b, osserviamo infatti che l'ampiezza del vettore è ancora quella della portante, mentre il movimento avviene con la velocità angolare variabile  $\omega_{FM}(t)$ . Comprendiamo quindi che la fase istantanea cambia nel tempo, essendo anche in questo caso:

$$\omega(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

Per ricavare la fase bisogna invertire la relazione. Si ottiene:

$$\alpha(t) = \int \omega(t) dt$$

Ovvero:

$$\alpha_{FM}(t) = \int \omega_{FM}(t) dt = \int [\omega_p + k_f \cdot V_m(t)] dt = \omega_p \cdot t + k_f \int V_m(t) dt$$

La espressione matematica del segnale modulato in frequenza, pertanto, è la seguente:

$$V_{FM}(t) = A_p \cdot \cos[\alpha_{FM}(t)] = A_p \cdot \cos[\omega_p \cdot t + k_f \int V_m(t) dt]$$

### Modulazione PM: deviazione di fase e di frequenza indotta

Per la generica componente,  $V_{m1}$ , l'espressione del segnale modulato in fase diventa:

$$V_{PM}(t) = A_p \cdot \cos[\omega_p \cdot t + k_\alpha \cdot A_m \cdot \cos(\omega_m \cdot t)]$$

In base alla definizione, la *deviazione di fase*,  $\Delta\alpha$ , rappresenta lo scostamento massimo di fase del segnale modulato dal segnale di portante. Essendo  $\cos(\omega_m \cdot t)$  compreso tra  $-1$  e  $1$ , la massima variazione di fase del segnale modulato è:

$$\Delta\alpha = k_\alpha \cdot A_m$$

Abbiamo visto che la velocità angolare cambia nel tempo. Per  $V_{m1}$  si ha:

$$\omega_{PM}(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{d[\omega_p \cdot t + k_\alpha \cdot A_m \cdot \cos(\omega_m \cdot t)]}{dt}$$

Eseguendo la derivata, si ottiene (la derivata del coseno è meno il seno):

$$\omega_{PM}(t) = \omega_p - k_\alpha \cdot A_m \cdot \omega_m \cdot \sin(\omega_m \cdot t)$$

Abbiamo, quindi, verificato che la modulazione di fase induce anche una modulazione di frequenza.

Essendo  $\sin(\omega_m \cdot t)$  compreso tra  $-1$  e  $1$ , la massima deviazione della pulsazione indotta del segnale modulato è:

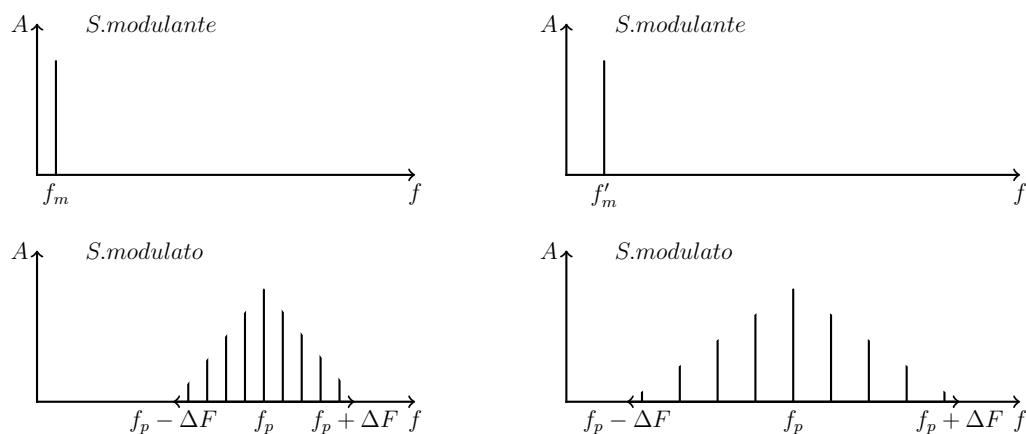
$$\Delta\omega = k_\alpha \cdot A_m \cdot \omega_m$$

Ricordando che:  $k_\alpha \cdot A_m = \Delta\alpha$  si ha:

$$\Delta\omega = \Delta\alpha \cdot \omega_m$$

Dividendo la velocità angolare per  $2\pi$ , si ottiene la relazione tra la deviazione di frequenza indotta e la deviazione di fase:

$$\Delta F = \Delta\alpha \cdot f_m$$

Figura 8.6: Spettro del segnale  $PM$ 

Nella modulazione di fase la deviazione di fase è un parametro del modulatore, quindi fisso, mentre la deviazione di frequenza indotta non è affatto fissa, essendo legata anche alla frequenza della specifica componente di  $V_m$ . A parità di deviazione di fase, infatti, la deviazione di frequenza indotta è *direttamente proporzionale* ad  $f_m$ . Con riferimento alla figura 8.6, ed in base alla espressione di Carson, sappiamo che ciascuna riga è riprodotta nello spettro più volte, essendo significative, in ciascuna delle due laterali, le righe che cadono nella zona di larghezza pari a  $\Delta F$  (con al più una riga al di fuori di tale zona).

Notiamo che il numero delle righe che cadono nella porzione  $\Delta F$  della banda è proprio  $\frac{\Delta F}{f_m}$ , corrispondente a  $\Delta\alpha$ , quantità che nella modulazione di fase è praticamente fissa.

Si deduce che nella modulazione di fase, ciascuna componente del segnale modulante, che sia di bassa o di alta frequenza, viene riprodotta lo stesso numero di volte, cioè con la medesima ridondanza informativa.

Infatti c'è lo stesso numero di righe spettrali nel primo grafico, dove  $f_m$  è bassa, e nel secondo, dove  $f'_m$  è più alta.

Per contro deve essere riservata a ciascuna componente una larghezza di banda differente, proporzionalmente tanto maggiore quanto più grande è la frequenza  $f_m$  della specifica componente.

La banda complessiva coincide allora con la massima larghezza di banda richiesta, cioè con la banda richiesta dalla componente di frequenza massima. Essa risulta in gran parte sottoutilizzata dalle componenti di bassa frequenza.



**Modulazione FM: deviazione di frequenza e di fase indotta**

Per la generica componente,  $V_{m1}$ , la velocità angolare cambia nel tempo nel seguente modo:

$$\omega_{FM}(t) = \omega_p + k_f \cdot A_m \cdot \cos(w_m \cdot t)$$

Dividendo per  $2\pi$  si ottiene la corrispondente espressione della frequenza:

$$f_{FM}(t) = f_p + \frac{k_f \cdot A_m}{2\pi} \cdot \cos(w_m \cdot t)$$

In base alla definizione, la *deviazione di frequenza*,  $\Delta F$ , è lo scostamento massimo di frequenza del segnale modulato dal segnale di portante. Essendo  $\cos(w_m \cdot t)$  compreso tra  $-1$  e  $1$ , la massima variazione di frequenza del segnale modulato è:

$$\Delta F = \frac{k_f \cdot A_m}{2\pi}$$

(La quantità:  $k_f \cdot A_m$  è la deviazione della pulsazione:  $\Delta\omega$ )

Per ottenere l'espressione del segnale modulato in frequenza, dobbiamo determinare come la fase istantanea cambia nel tempo, essendo:

$$\alpha(t) = \int \omega(t) dt$$

Eseguendo l'integrale, si ottiene:

$$\alpha_{FM}(t) = \int [\omega_p + k_f \cdot A_m \cdot \cos(w_m \cdot t)] dt = \omega_p \cdot t + k_f \cdot A_m \cdot \int [\cos(w_m \cdot t)] dt$$

Facendo il cambio di variabile:  $z = w_m \cdot t$ ;  $dz = w_m \cdot dt$ ;  $dt = \frac{dz}{w_m}$ ; si ricava (l'integrale del coseno è il seno):

$$\alpha_{FM}(t) = \omega_p \cdot t + \frac{k_f \cdot A_m}{w_m} \cdot \text{sen}(w_m \cdot t)$$

L'espressione matematica del segnale modulato in frequenza è allora:

$$V_{FM}(t) = A_p \cdot \cos\left[\omega_p \cdot t + \frac{k_f \cdot A_m}{w_m} \cdot \text{sen}(w_m \cdot t)\right]$$

Abbiamo, quindi, verificato che la modulazione di frequenza induce anche una modulazione di fase.

Essendo  $\text{sen}(w_m \cdot t)$  compreso tra  $-1$  e  $1$ , la massima deviazione indotta della fase del segnale modulato è:

$$\Delta\alpha = \frac{k_f \cdot A_m}{w_m}$$

Ricordando che:  $k_f \cdot A_m = \Delta\omega$  si ha:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\omega}{\omega_m}$$

Dividendo la velocità angolare per  $2\pi$ , si riottiene la relazione tra la deviazione di fase indotta e la deviazione di frequenza:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta F}{f_m}$$

Nella modulazione di frequenza la deviazione di frequenza è un parametro del modulatore, quindi fisso, mentre la deviazione di fase indotta non è affatto fissa, essendo legata anche alla frequenza della specifica componente di  $V_m$ . A parità di deviazione di frequenza, infatti, la deviazione di fase indotta è *inversamente proporzionale* ad  $f_m$ . Con riferimento alla figura 8.7 ed in base alla espressione di

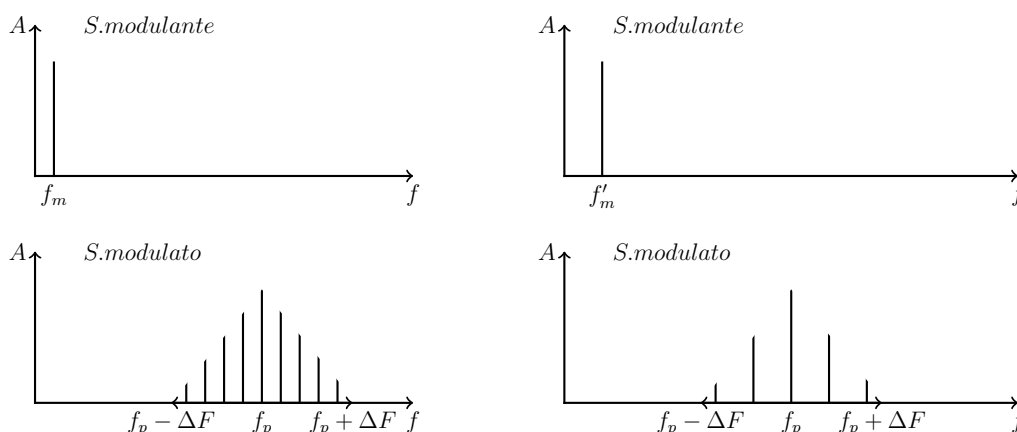


Figura 8.7: Spettro del segnale *FM*

Carson, sappiamo che ciascuna riga è riprodotta nello spettro più volte, essendo significative, in ciascuna delle due laterali, le righe che cadono nella zona di larghezza pari a  $\Delta F$  (con al più una riga al di fuori di tale zona).

Notiamo che ora ci sono più righe spettrali nel primo grafico, dove  $f_m$  è bassa, mentre ce ne sono di meno nel secondo, dove  $f'_m$  è più alta.

Il numero delle righe che cadono nella porzione  $\Delta F$  della banda è ancora dato da:  $\frac{\Delta F}{f_m}$ , quindi  $\Delta\alpha$ .

Ma ora la quantità fissa è  $\Delta F$ , mentre  $\Delta\alpha$  diminuisce al crescere della frequenza. Si deduce che nella modulazione di frequenza, la larghezza di banda messa a disposizione delle singole componenti è la stessa, mentre le componenti di bassa frequenza del segnale modulante, le più significative dal punto di vista informativo,

sono riprodotte un numero di volte maggiore delle componenti di alta frequenza, cioè con maggiore ridondanza informativa. La banda risulta quindi utilizzata in modo ottimale ed è questo il motivo per il quale questo tipo di modulazione è molto usato a livello applicativo.

## 8.2 Le codifiche numeriche

Nelle trasmissioni numeriche il ruolo, che nel trasmettitore analogico era svolto dal modulatore, è ora svolto dal codificatore, come si vede in figura 8.8. Il segnale dei

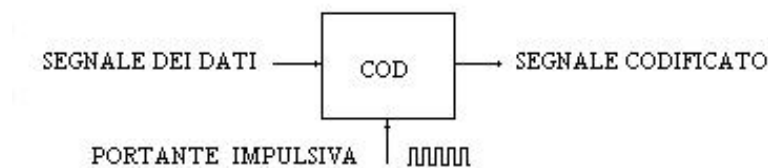


Figura 8.8: Schematizzazione della trasmissione numerica

dati è il segnale che proviene da un sistema digitale, detto *Terminale* utente.

Questo segnale, per poter attraversare il canale numerico, viene codificato, una operazione che ha un effetto analogo alla modulazione, andando a modificare radicalmente il contenuto spettrale del segnale, in particolare traslando le componenti con frequenze più basse verso valori di frequenza più alti.

Il codificatore, che è un dispositivo digitale, utilizza, per elaborare il segnale dell'utente, un proprio segnale di clock, con andamento impulsivo (ad onda quadra), il quale svolge una funzione analoga a quella svolta dalla portante analogica.

I tipi di codifica escogitati sono in continua evoluzione, potendo essere di tipo bit per bit o multibit, a seconda che con ciascun impulso della portante si codifichi un singolo bit o più bit.

Un esempio di codifica, diffuso nelle reti locali Ethernet, è il codice Manchester.

### 8.2.1 Il segnale dei dati

Come qualunque sistema digitale, anche il Terminale utente, ha un proprio segnale di clock con il quale sincronizza tutte le operazioni interne ed esterne, quindi anche il trasferimento dei dati.

Ad ogni ciclo di clock il terminale trasmette uno o più bit di una sequenza e a tale scopo, per ciascun bit e per un tempo prefissato,  $\Delta t$ , trasferisce in uscita, a seconda del valore del *bit*, un livello alto  $V_H$  o un livello basso  $V_L$ .

Chiamiamo questo tempo,  $\Delta t$ , *durata del bit*. Ovviamente minore è  $\Delta t$  maggiori

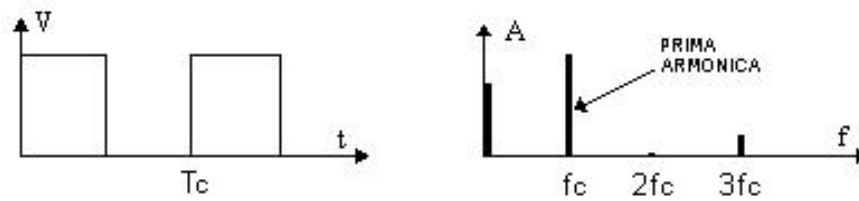


Figura 8.9: Visione grafica e spettrale di un segnale di clock

sono le informazioni che potremmo inviare nell'unità di tempo.

Esso è legato al periodo del clock. Se si trasmette un singolo bit ad ogni ciclo di clock allora sarà:  $T_C = \Delta t$ . In generale, se si trasmettono  $n$  bit ad ogni ciclo di clock, allora è:  $T_C = n \cdot \Delta t$ .

Una sequenza di bit, ad esempio 10110100 sarà trasmessa sotto forma del segnale di figura 8.10. Questo è il segnale dei dati nella sua forma canonica, ed è denominato

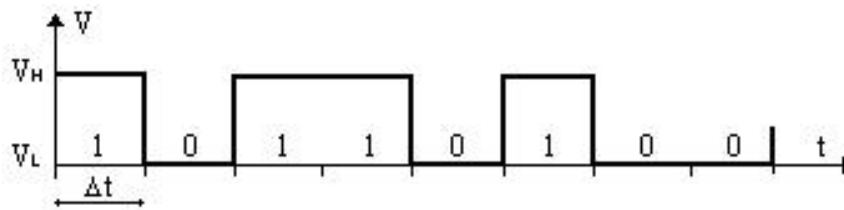


Figura 8.10: Visione grafica di un segnale numerico NRZ

segnale NRZ, perché nel periodo in cui il bit è a 1 la linea è messa sotto tensione per tutto il tempo di bit.

### 8.2.2 La velocità di trasmissione

**Definizione 26.** Si definisce velocità di trasmissione,  $V_{TX}$  il numero di bit trasmessi nell'unità di tempo.

Essa viene misurata in *bit/sec*, una unità di misura chiamata convenzionalmente *bps*, un acronimo per 'bit per secondo':

$$[bps] = bit/sec$$

Detto  $\Delta t$  il tempo di bit, allora la velocità di trasmissione è data da  $1/\Delta t$ .

In generale, essendo  $T_C = n \cdot \Delta t$ , si trova la seguente relazione importante tra la frequenza del clock e la velocità di trasmissione:

$$V_{TX} = n \cdot f_C$$

Ovvero:  $n^\circ$  di cicli (o transizioni) del segnale per secondo  $\cdot n^\circ$  di bit associati ad ogni ciclo.

Il  $n^\circ$  di cicli del segnale nell'unità di tempo viene chiamato **baud rate** o anche *velocità in baud*, da cui si ottiene:

$$V_{TX} = BAUDRATE \cdot n \text{ [bps]}$$

Il baud rate non fornisce il numero di bit trasmessi, ma il numero di sequenze di bit trasmesse, per cui esso non rappresenta affatto la quantità di informazione trasmessa, per ottenere la quale si deve moltiplicare il baud rate per il numero di bit della sequenza.

La velocità in *bps* e il *baud rate* coincidono solo nel caso di trasmissione a due livelli.

### 8.2.3 Lo spettro del segnale numerico

Il segnale dei dati può essere costituito da una sequenza qualsiasi di bit ed il suo spettro varia di conseguenza. Nel caso più generale, se si considerano lunghe sequenze, costituite da centinaia e centinaia di bit, all'interno della sequenza possiamo immaginare l'alternarsi, in modo del tutto casuale, di sequenze con un numero qualsiasi di bit uno. Tutte queste sequenze contribuiscono statisticamente allo spettro, dando loro componenti.

Si dimostra che lo spettro del segnale è, statisticamente, quello di figura 8.11:

Si noti come lo spettro ricalchi nella sua forma lo spettro dell'impulso rettangola-

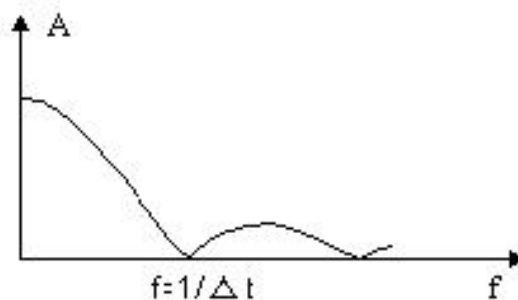


Figura 8.11: Visione spettrale del segnale numerico

re. Da esso si desume che la parte principale del contenuto armonico del segnale è compresa tra 0 e  $f = 1/\Delta t$ . Ai fini della trasmissione numerica dei dati esso pone almeno tre problemi importanti:

- Componente continua

Il segnale ha una componente continua, corrispondente al valor medio del

segnale, che è tanto più grande quanto più in esso ci sono lunghe sequenze di bit a 1. Con livelli:  $V_H > 0$  e  $V_L = 0$ , basta che sia trasmesso anche un singolo bit a uno perché si presenti un valore medio diverso da zero. Questa componente continua, se presente, andrebbe a sovrapporsi alle alimentazioni dei circuiti elettronici atti alla elaborazione del segnale. Si ricorda ad esempio, che la rete telefonica prevede già nelle proprie linee la presenza della alimentazione degli apparecchi telefonici. Normalmente le linee hanno un filtro che impedisce alla componente continua di entrare.

- Sincronizzazione

Non vi è alcuna componente alla frequenza della portante, per cui il ricevitore avrà dei problemi per estrarre e ricostruire la portante a partire dal segnale stesso. Questo problema si presenta in particolare in concomitanza di lunghe sequenze di bit allo stesso valore, dove il segnale non presenta alcuna transizione alto basso e viceversa, impedendo di fatto al ricevitore di tenersi sincronizzato con il trasmettitore.

- Forte attenuazione

Le componenti armoniche sono concentrate nella parte bassa dello spettro. La maggior parte della potenza di trasmissione sarà dunque impegnata per trasmettere le componenti del segnale di bassa frequenza, che subiscono una forte attenuazione nel canale.

Sono essenzialmente questi i motivi che hanno indotto i progettisti a manipolare ulteriormente il segnale per cercare di renderlo più adatto alla trasmissione, portandoli a sviluppare numerosi codici di canale, i quali sono tuttora in evoluzione. La codifica di canale ha l'effetto di modificare, anche radicalmente, la forma dello spettro.

### 8.2.4 Il codice Manchester

Il codice Manchester è una delle forme di codifica utilizzate nelle trasmissioni digitali, essendo usata in molte delle reti LAN. Essa è utile per capire come funziona la codifica di canale.

Ci sono almeno due versioni <sup>1</sup>. Nella versione di base essa codifica i bit con due livelli simmetrici  $V$  nel modo indicato in figura 8.12.

- per il bit 1, il segnale assume nella prima metà del tempo di bit il livello  $+V$ , mentre passa a  $-V$  nella seconda metà dello stesso.

---

<sup>1</sup>Nella seconda versione, detta codifica Manchester differenziale, il bit 1 è associato al cambiamento della fase del segnale, mentre il bit 0 è associato al mantenimento della fase precedente.

- per il bit 0, al contrario, il segnale assume nella prima metà del tempo di bit il livello  $-V$ , mentre passa a  $+V$  nella seconda metà dello stesso.

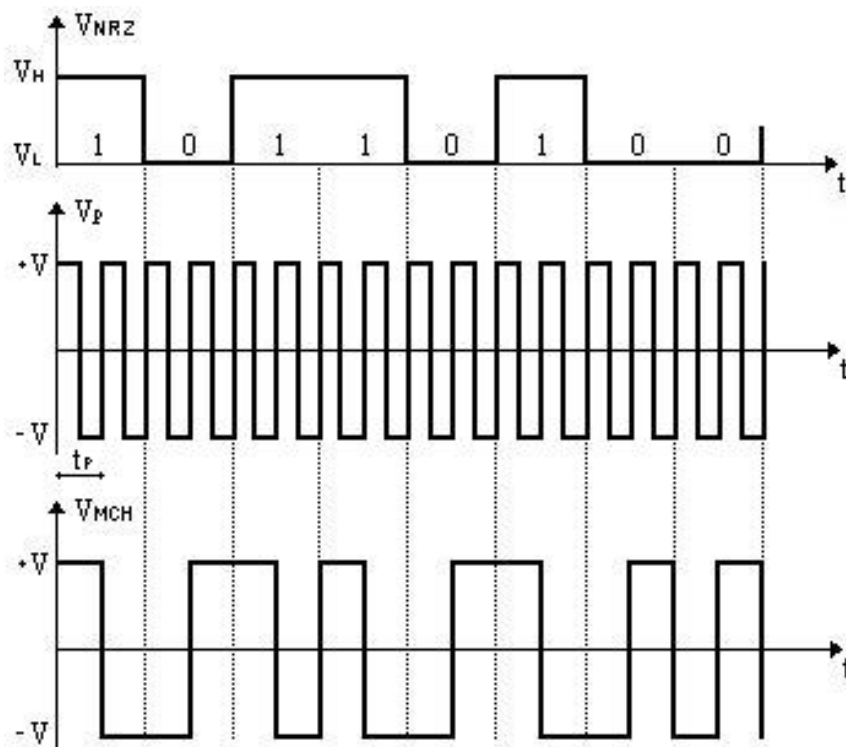


Figura 8.12: Segnale numerico con codifica Manchester

In pratica è come se il bit 1 fosse rappresentato dal dicit:10 ed il bit 0 dal dicit:01. Con questa modalità si ha la certezza che in ogni tempo di bit il segnale compie una transizione o alto basso o basso alto, caratteristica che aiuta il ricevitore a sincronizzarsi.

Nella pratica si introduce una portante con frequenza doppia del clock e la codifica Manchester è ricondotta ad una codifica di fase.

La scelta di avere due livelli entrambi non nulli consente intanto di eliminare totalmente la componente continua del segnale, ma comporta la dissipazione di potenza nella trasmissione di ciascuno dei bit del segnale.

Ciò è compensato dal fatto che la parte preponderante della potenza è relativa a componenti armoniche poste in corrispondenza del valore di clock.

Il codice Manchester, infatti, elimina le lunghe sequenze di bit a 1 e di bit a zero, trasferendo le componenti che nel segnale dati sono a bassa frequenza, verso la zona elevata della banda, in corrispondenza del valore del clock.

Una sequenza di bit, ad esempio, a 1, diventa infatti un'onda quadra con frequenza

pari a quella del clock, come mostrato in figura 8.13.

Siamo ora in grado di desumere anche per il codice Manchester lo spettro del

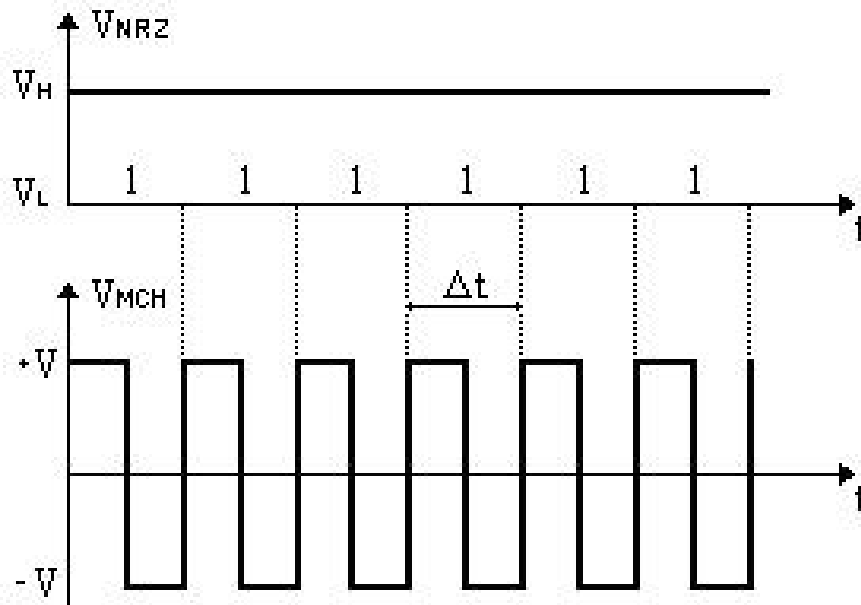


Figura 8.13: lunghe sequenze di 1 in codice Manchester

segnale, il quale avrà l'andamento di figura 8.14

Il codice Manchester consente, quindi, di risolvere tutti i principali problemi della trasmissione dei dati in formato digitale. Infatti elimina la componente continua, trasferisce le componenti di bassa frequenza attorno alla portante e consente al ricevitore di estrarre e ricostruire agevolmente la portante dal segnale ricevuto. Inoltre consente di identificare con certezza il momento in cui inizia e termina la trasmissione perché ciò è indicato da una transizione alto basso o basso alto in linea. Ma tutto ciò al prezzo di una banda complessiva doppia rispetto alla banda del segnale originario.

Pertanto, per avere, ad esempio, una velocità di trasmissione di  $10\text{Mbps}$ , è necessario che il segnale cambi 20 milioni di volte al secondo, cioè che la portante sia di 20 MHz.

### 8.2.5 La codifica della fast Ethernet

Nella fast Ethernet, che utilizza cavi di categoria 5, la frequenza della portante sale dai  $20\text{MHz}$  della Ethernet classica a  $125\text{MHz}$ . Se si operasse con la codifica Manchester la velocità di trasmissione sarebbe poco più della metà del valore richiesto. Si utilizza invece una codifica più complicata detta  $4B/5B$ , ovvero di



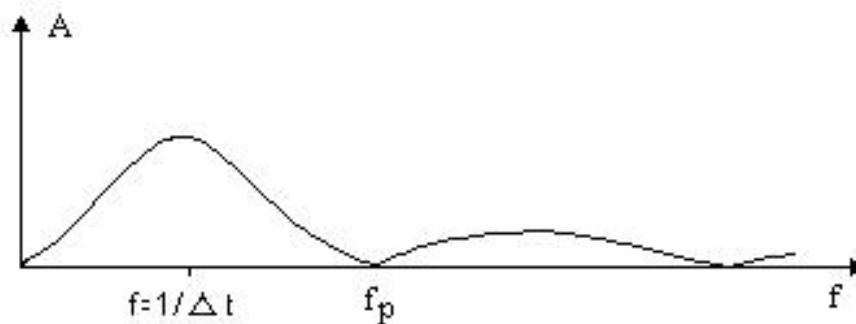


Figura 8.14: visione spettrale del segnale con codifica Manchester

4 bit su 5 bit: 5 impulsi della portante sono utilizzati per codificare solo 4 bit dei dati. Pertanto delle 32 combinazioni possibili nel tempo di 5 impulsi della portante, ne sono utilizzate solo 16, scelte attentamente, per consentire la presenza di un numero congruo di transizioni del segnale, sufficienti al mantenimento della sincronizzazione.

### 8.2.6 Il teorema di Shannon sulla capacità di informazione

L'espressione di  $V_{TX}$  ci dice che abbiamo due strade per incrementare la velocità di trasmissione: aumentare la frequenza del clock, oppure aumentare il numero dei bit trasmessi ad ogni ciclo.

La tendenza ad incrementare la frequenza del clock è tipica di tutti i sistemi digitali e trova la sua limitazione nelle caratteristiche dei dispositivi utilizzati. Nel nostro caso la frequenza è limitata dalla banda passante del canale di comunicazione utilizzato.

Per aumentare il numero di bit si deve ricorrere a codifiche multibit. Una codifica multibit, di tipo ampiezza, deve prevedere la possibilità di assegnare alla portante più di due distinti livelli di tensione; analogamente una codifica multibit di tipo fase deve prevedere la possibilità di assegnare alla portante più di due distinti valori di fase. Supponiamo, per fissare le idee, di operare una codifica multibit di tipo ampiezza. Partiamo da una trasmissione con due livelli e incrementiamo via via, secondo potenze di due, il *numero* degli stessi, come in figura 8.15. Osserviamo che, man mano che incrementiamo il numero dei livelli, a parità di clock, la velocità di trasmissione aumenta.

Questo processo, però, non può essere spinto oltre un certo limite.

Si ha, infatti, che il valore di  $V_{MAX}$  è limitato dal particolare trasmettitore utilizzato, non potendo superare il valore di alimentazione. Man mano che il *numero* di livelli aumenta, la distanza  $\Delta V$  tra due livelli consecutivi diminuisce. Quando  $\Delta V$  diventa confrontabile con l'ampiezza,  $V_{MIN}$ , del *rumore* presente nel canale, allora

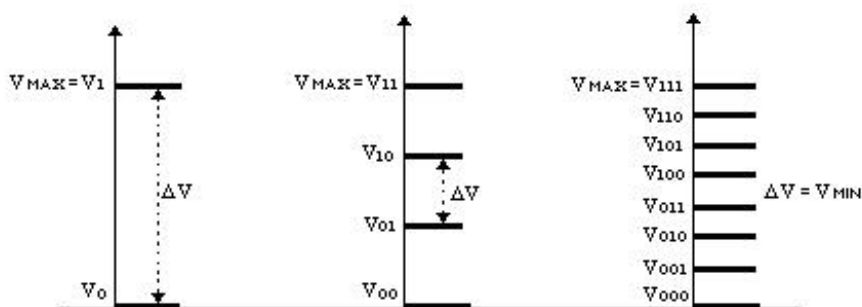


Figura 8.15: codifica multibit multilivello

un dato livello può essere alterato dal rumore lungo il canale e non più riconosciuto correttamente dal ricevitore.

Chiediamoci: possiamo, con differenti tipi di codifica dell'informazione, aumentare ulteriormente la velocità di trasmissione?

A questa domanda risponde un teorema fondamentale sulla massima velocità di trasmissione, dovuto a *Shannon*:

**Teorema 1** (di Shannon). *Qualunque sia il tipo di codifica utilizzato per la trasmissione delle informazioni, se indichiamo con  $B$  la banda del canale, con  $S$  la potenza del segnale, con  $N$  la potenza del rumore, ovvero con  $S/N$  il rapporto Signal to Noise, allora la massima velocità di trasmissione, chiamata anche capacità di informazione del canale, che consente al ricevitore la decodifica corretta del segnale, non è mai superiore a:*

$$V_{MAX} = B \cdot \lg_2(1 + S/N) \quad (bps)$$

### 8.2.7 Esempio

si chiede di determinare, in base al teorema di Shannon, la massima velocità di trasmissione attraverso un doppino intrecciato avente banda passante di  $1 MHz$  e rapporto  $S/N$  di  $50dB$ .

Si ottiene:

$$V_{LIM} \approx 10^6 \cdot \lg_2(1 + 10^5) \approx 10^6 \cdot 16,6 = 16,6 \text{ Mbps}$$

Osserviamo la velocità limite è comunque ottenuta moltiplicando due valori, il primo relativo al valore della frequenza ed il secondo al numero dei bit. Considerato che la frequenza della portante deve comunque essere inferiore a  $1 MHz$ , si comprende che questo risultato è raggiungibile operando una codifica multibit con più di 16 bit.

## 8.3 Esercizi

### Questionario 1

1. Elenca e descrivi gli elementi fondamentali del sistema di comunicazione a distanza, facendo riferimento anche ai mezzi trasmissivi utilizzati e alle loro caratteristiche.
2. Con riferimento allo schema del trasmettitore, quale è la funzione del modulatore? E dell'adattatore di canale?
3. Con riferimento allo schema del ricevitore, quale è la funzione del demodulatore? Spiega come avviene la sincronizzazione.
4. Cos'è un'onda elettromagnetica? Che lunghezza d'onda possiede? Quali sono le fasce principali usate nelle telecomunicazioni? Quale è la differenza tra antenna trasmittente ed antenna ricevente?
5. Spiega la costituzione e il principio di funzionamento della fibra ottica. Quale è la differenza tra diodo laser e fotodiodo?
6. Con riferimento allo schema della trasmissione via cavo, descrivi la stessa.

### Questionario 2

1. Definisci la modulazione.
2. Cos'è la portante? Illustra le differenze tra le trasmissioni analogiche e le trasmissioni numeriche.
3. Quale effetto produce la modulazione di ampiezza?
4. Quale effetto produce la modulazione di frequenza?
5. Quale effetto produce la modulazione di fase?
6. Spiega la differenza tra deviazione di frequenza e deviazione di fase.

### Questionario 3

1. Definisci la velocità di trasmissione in *bps* ed in *Baud*, mostrando il legame tra le stesse. Quale è il vantaggio di una trasmissione multibit?
2. Enuncia il teorema di Fourier e giustifica con esso lo spettro del segnale di klok.

3. Data una sequenza di bit, mostra come si traduce nel segnale *NRZ* e definisci il tempo di bit.
4. Illustra lo spettro del segnale *NRZ* e giustificalo. Quali sono i problemi che si pongono ai fini trasmissivi?
5. Descrivi la codifica Manchester e lo spettro relativo.
6. Quali sono i parametri di un mezzo trasmissivo che influiscono sulla velocità di trasmissione? Esiste una giustificazione teorica?

### Questionario 4

1. Definisci la multiplazione
2. Riporta e descrivi la tecnica *FDM*
3. Riporta e descrivi la tecnica *TDM*
4. Che cos'è il Time slot?
5. Quali sono le caratteristiche della linea telefonica? E della linea telematica?
6. Che cos'è il 'primo miglio'?

### Esercizi

1. Si deve trasmettere via etere un segnale vocale con banda lorda di  $4\text{ kHz}$  nella gamma compresa tra  $1\text{ GHz}$  e  $1,2\text{ GHz}$ . Si chiede, con relativa giustificazione, il piano della modulazione, comprensivo di: il tipo di modulazione che si intende utilizzare, la suddivisione della banda, la scelta delle portanti, la rappresentazione spettrale della modulazione.
2. Si deve trasmettere su cavo elettrico un segnale vocale con banda netta da  $300$  a  $3400\text{ Hz}$ , traslato nella sottobanda con portante di  $800\text{ kHz}$ . Si chiede, con giustificazione, il piano della modulazione con: il tipo di modulazione che si ritiene di utilizzare, la rappresentazione grafica e spettrale della stessa ed il calcolo della banda traslata.
3. Si deve trasmettere con fibra ottica un segnale dati codificato con due livelli:  $V_L = 0$  e  $V_H = 5\text{ V}$ , a  $12000\text{ bps}$ , dopo che è stato inserito su un flusso a  $10\text{ Mbps}$ . Si chiede: Lo schema a blocchi della trasmissione con descrizione. La rappresentazione del flusso e dello spettro relativo, con il calcolo del tempo di bit e del Time Slot. Il numero dei canali multiplati.

4. Un segnale audio con frequenza massima di  $15\text{ kHz}$  è modulato in frequenza con deviazione di frequenza massima di  $75\text{ kHz}$ . Si chiede, con giustificazione, il piano della modulazione con: la rappresentazione grafica e spettrale della stessa ed il calcolo della banda del segnale modulato.
5. Un sistema di telecomunicazioni mette in comunicazione due stazioni di segnale vocale, con un ponte radio sulla frequenza di  $800\text{ MHz}$  in trasmissione e di  $1600\text{ MHz}$  in ricezione. Proponi una soluzione comprensiva: dello schema della trasmissione (Tx, Rx) e della descrizione della funzione dei blocchi principali (almeno due); del piano della trasmissione; del calcolo della banda occupata in trasmissione ed in ricezione in funzione del tipo di modulazione prescelto.
6. Un segnale periodico ha banda limitata superiormente al valore di  $10\text{ KHz}$  e componente fondamentale di  $2,4\text{ kHz}$ . Esso viene filtrato, traslato in frequenza di  $200\text{ kHz}$  e trasmesso via etere, in modo tale da occupare, dopo la modulazione, una banda complessiva di  $9,6\text{ kHz}$ . Si chiede: Lo schema del trasmettitore con descrizione e l'indicazione della modulazione utilizzata. Il piano della modulazione con la visione grafica e spettrale. La dimostrazione della tipologia del filtro e il calcolo della frequenza di taglio dello stesso. Le caratteristiche del segnale prima e dopo il filtro, con giustificazione.
7. Nel contesto delle trasmissioni analogiche, si supponga una comunicazione via etere nella gamma  $4,9\text{ MHz} \div 5,1\text{ MHz}$ , in modulazione di frequenza con deviazione di frequenza di  $16\text{ kHz}$ . Si chiede inoltre di organizzare una trasmissione a più utenti, sapendo che la banda di ciascun utente occupa la gamma  $0 \div 4\text{ kHz}$ . Si chiede: Lo schema a blocchi del trasmettitore con descrizione. Il piano della modulazione, con la visione grafica e spettrale. La determinazione della banda occupata da ciascun canale, dei numero dei canali serviti e l'assegnazione della portante a ciascun canale.
8. In una trasmissione telefonica via cavo sono allocati in *FDM*, nella fascia  $120 \div 144\text{ kHz}$ , i segnali di tre sorgenti:  $A, B, C$ . La gamma originaria delle sorgenti:  $20\text{ Hz} \div 20\text{ kHz}$ , deve essere preventivamente limitata alla sola gamma delle frequenze vocali. Si chiede: Lo schema del sistema *FDM* utilizzato, con descrizione. Il piano della modulazione dei segnali trasmessi, con la visione grafica e spettrale. Il calcolo delle bande e delle portanti assegnate a ciascun segnale. La dimostrazione della tipologia del filtro e della frequenza di taglio dello stesso. Le caratteristiche del segnale prima e dopo il filtro, con giustificazione.
9. Un flusso di dati ( $11011001\dots$ ) con tempo di bit di  $2\mu\text{s}$  è codificato, con codifica Manchester, e trasmesso via cavo, dopo aver attraversato un filtro

che lo priva delle code. Si chiede: Lo schema del sistema di trasmissione con descrizione. Il piano della codifica con visione grafica e spettrale e l'eventuale assegnazione della portante. La dimostrazione della tipologia del filtro e della frequenza di taglio dello stesso. Le caratteristiche del segnale prima e dopo il filtro, con giustificazione. Il calcolo della velocità di trasmissione e della banda occupata.