

# LE TRASMISSIONI VIA CAVO

B.Bortelli

## Indice

<b>1</b>	<b>Le trasmissioni via cavo</b>	<b>2</b>
1.1	Lo schema generale delle trasmissioni via cavo . . . . .	2
1.1.1	Analisi qualitativa del potenziale . . . . .	4
1.1.2	Il livello del segnale in $dB_m$ e l'attenuazione . . . . .	6
1.2	La condizione per il massimo trasferimento di energia . . . . .	7
1.3	Le costanti primarie e il modello elettrico di una linea . . . . .	8
1.3.1	Le costanti primarie . . . . .	8
1.3.2	Il modello a costanti concentrate . . . . .	10
1.3.3	Il modello a costanti distribuite . . . . .	11
1.4	Le equazioni di propagazione . . . . .	11
1.4.1	Effetto sulla tensione . . . . .	11
1.4.2	Effetto sulla corrente . . . . .	12
1.5	Le soluzioni delle equazioni di propagazione . . . . .	14
1.5.1	L'impedenza caratteristica . . . . .	15
1.5.2	Linea senza perdite . . . . .	16
1.5.3	La condizione di Heaviside . . . . .	17
1.5.4	L'onda diretta . . . . .	18
1.5.5	La lunghezza d'onda e la velocità di propagazione . . . . .	20
1.5.6	Linea lunga . . . . .	22
1.6	Onda riflessa e onda stazionaria . . . . .	23
1.6.1	La riflessione come fenomeno . . . . .	23
1.6.2	L'espressione e parametri dell'onda riflessa . . . . .	24
1.6.3	L'indice di riflessione . . . . .	26
1.6.4	L'onda stazionaria . . . . .	27
1.6.5	L'espressione dell'indice di riflessione . . . . .	28
1.6.6	Esempio 1: linea aperta . . . . .	29
1.6.7	Esempio 2: linea in cortocircuito . . . . .	31
1.6.8	IL R.O.S. . . . .	32
1.7	Questionario riepilogativo . . . . .	33
1.8	Esercizi di calcolo . . . . .	34

# 1 Le trasmissioni via cavo

## 1.1 Lo schema generale delle trasmissioni via cavo

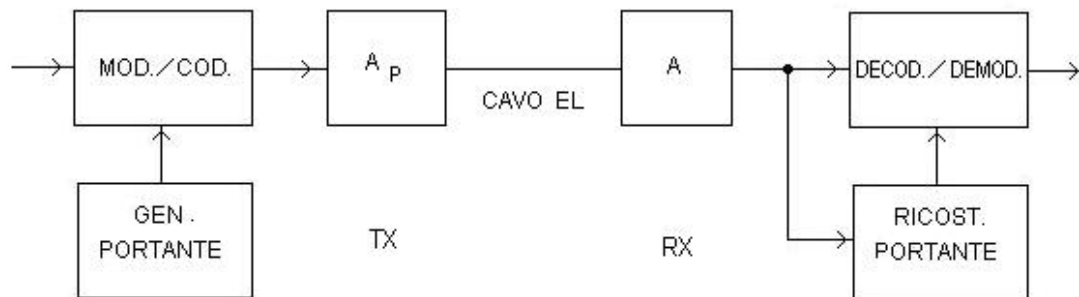


Figura 1: Schema a blocchi della trasmissione via cavo

Nella trasmissione via cavo il segnale si trasmette con la sua natura di segnale elettrico, quindi non è necessario alcun elemento di conversione della natura del segnale.

Resta, invece, il problema della frequenza, in quanto, in linea generale, il segnale dovrà occupare una specifica sottobanda del canale e quindi deve essere traslato in frequenza sui valori della sottobanda assegnata.

A tale scopo nel trasmettitore è presente il dispositivo generatore della portante ed il modulatore dove il segnale da trasmettere viene inserito sulla portante ed in questo modo traslato sui valori di frequenza richiesti.

Un amplificatore di potenza, provvede poi a dare al segnale l'intensità sufficiente a propagarsi, con ampiezza apprezzabile, fino alla estremità opposta del cavo. Qui il segnale perviene al ricevitore, il quale lo preamplifica, estrae le informazioni per ricostruire la portante e lo demodula, ritraslandolo sui valori di frequenza originali.

Benché la trasmissione dei segnali a distanza avvenga oggi sempre più ampiamente via radio, o attraverso le fibre ottiche, le tradizionali linee elettriche su rame sono ancora ampiamente diffuse e continuano a rivestire una notevole importanza.

Basta considerare che un qualunque apparato elettronico è costituito da tanti blocchi funzione, collegati gli uni agli altri attraverso cavi elettrici di collegamento. Anzi, ciascun blocco dell'apparato è esso stesso costituito da componenti collegati gli uni agli altri dalle piste elettriche. Fino ad ora non abbiamo mai dato importanza ai cavi ed alle piste di collegamento, relativamente ai quali abbiamo sempre supposto che fossero a *resistenza elettrica* nulla e che non introducessero alcuna distorsione sul segnale. Questa ipotesi è stata fatta anche per i dispositivi di misura, come il tester o l'oscilloscopio, dei cui cavetti di collegamento ci siamo ampiamente disinteressati. (Ma per l'oscilloscopio abbiamo capito che parametri parassiti,

quali la capacità parassita della sonda, possono interferire nella misura, specie alle alte frequenze.) Tutte le volte che ci siamo serviti di un cavetto di collegamento abbiamo sempre supposto che il potenziale a un capo del cavetto coincidesse sempre e perfettamente con il potenziale all'altro capo e ciò indipendentemente dalla lunghezza del cavo, che era comunque supposta breve.

Ci occupiamo ora, però, di un cavo elettrico per telecomunicazioni, la cui lunghezza deve essere tale da consentire la connessione tra due dispositivi anche molto lontani tra loro: da alcune decine di metri in su.

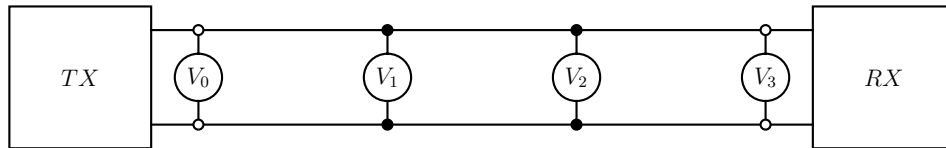


Figura 2: Linea elettrica bifilare

Consideriamo, cioè, un sistema di trasmissione, fig. 2, dove il mezzo trasmissivo è una linea elettrica bifilare, costituita da due cavi conduttori (di rame) *lunghi*. Supponiamo che, ad un dato istante,  $t_0$ , il trasmettitore metta sotto tensione un capo della linea, per un tempo  $\Delta t$ , allo scopo di inviare una unità di informazione verso il ricevitore.

Si può ancora dire che il segnale si propaga istantaneamente e senza alcuna attenuazione all'altro capo del cavo?

Disponiamo, a distanza regolare dal trasmettitore, una serie di tester, allo scopo di osservare qualitativamente la propagazione del segnale nel cavo.

Per individuare esattamente la loro posizione, introduciamo un asse di riferimento con origine in corrispondenza del trasmettitore ed orientato verso il ricevitore.

Il primo tester,  $V_1$  lo posizioniamo all'inizio della linea, cioè nella posizione  $x_0 = 0$ ; il secondo nella posizione  $x_1$ , ecc.; l'ultimo in uscita della linea, nella posizione  $x_4 = L$ .

L'esperienza evidenzia, fig. 3, i seguenti effetti importanti:

- *ritardo di propagazione* crescente, per il fatto che la velocità di propagazione dei segnali è *finita*, sempre inferiore della velocità della luce nel vuoto.
- attenuazione della tensione man mano che ci allontaniamo dal trasmettitore; la tensione cambia da punto a punto della linea, decrescendo in modo esponenziale. Il suo andamento dipende da un parametro molto importante, denominato *coefficiente di attenuazione* ed indicato con  $\alpha$ ;
- *assorbimento di corrente*; la linea assorbe corrente in quando si comporta come un carico passivo, con un determinato valore di *impedenza*, denominato

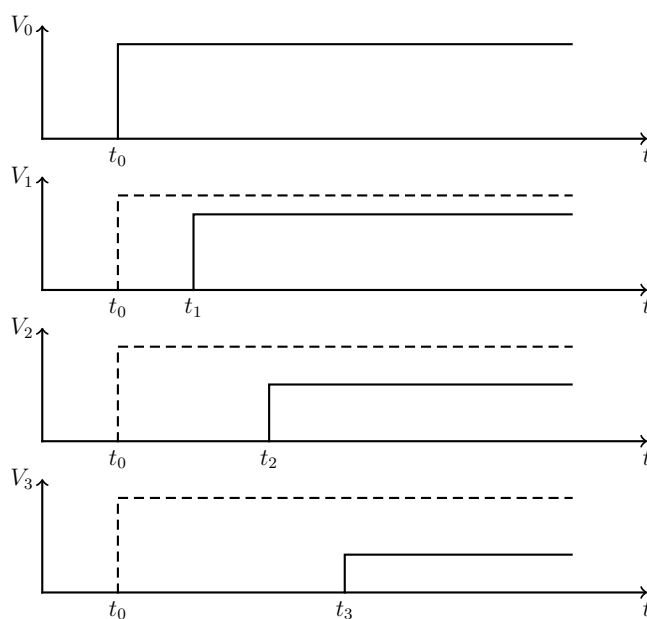


Figura 3: Rilievo della tensione nei diversi punti della linea

*impedenza caratteristica* della linea. Questo parametro molto importante, è indicato con  $Z_0$ .

- *riflessione*; quando il segnale immesso raggiunge il punto terminale della linea, si osserva che, se la linea non è perfettamente adattata con il ricevitore, parte del segnale, invece di essere assorbito dal ricevitore, si propaga a ritroso verso il trasmettitore! Perché la linea ed il ricevitore siano adattati è necessario che l'impedenza della linea e quella del ricevitore siano uguali. solo in questo caso non si osserva onda riflessa.

Questi effetti sono dovuti alle caratteristiche costitutive della linea. I cavi metallici presentano una serie di parametri, ad esempio la resistenza ohmica, che, se sono lunghi, non sono affatto trascurabili.

### 1.1.1 Analisi qualitativa del potenziale

Prima di tutto cerchiamo di comprendere con quale modalità si attenua il segnale nella sua propagazione dal trasmettitore al ricevitore.

Cominciamo con il supporre che il trasmettitore immetta un dato potenziale, con ampiezza  $V_D$ , in linea.

Propagandosi verso il ricevitore ci aspettiamo che l'ampiezza del potenziale venga attenuata e quindi diminuisca progressivamente.

Se la linea è sufficientemente lunga, dopo una distanza  $\Delta x$  l'ampiezza si sarà addirittura dimezzata.

Ma allora, dopo una distanza doppia,  $2 \cdot \Delta x$ , sarà ulteriormente dimezzata, e così via.

Vediamo questo comportamento graficamente in figura 4.

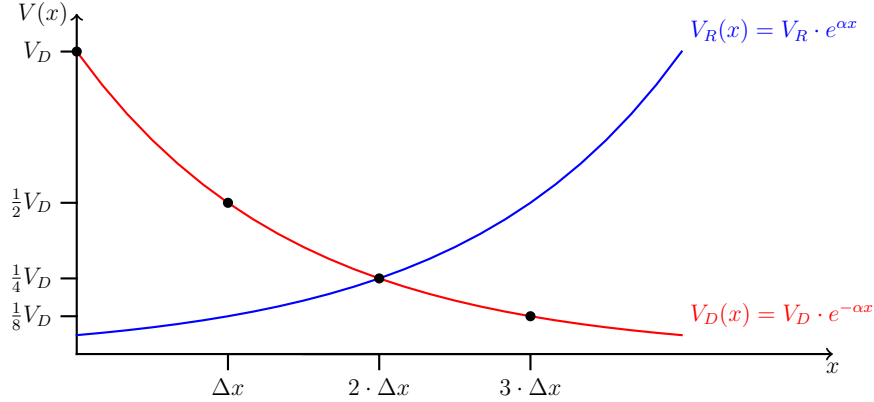


Figura 4: Andamento qualitativo del potenziale

Matematicamente l'ampiezza della tensione in un punto della linea è una *funzione* decrescente della sua *posizione*  $x$ , che gode della proprietà di dimezzarsi per incrementi fissi della variabile. Sappiamo che questo comportamento è caratteristico della funzione esponenziale.

La sua espressione matematica, (D significa *diretta*), dovrebbe essere quella di un esponenziale decrescente:

$$V_D(x) = V_D \cdot e^{-\alpha x}$$

dove con  $\alpha$  abbiamo indicato una costante opportuna. Essendo ad esponente di una funzione esponenziale a base naturale, essa viene misurata in  $\frac{Np}{m}$

Prima di concludere la nostra analisi, dobbiamo anche considerare il caso che la trasmissione avvenga in senso contrario. In effetti la linea è perfettamente speculare, quindi può benissimo essere usata in senso contrario. In questo caso il potenziale verrebbe immesso in linea dall'altro lato e, propagandosi a ritroso, verrebbe attenuato. Osservando i diversi valori del potenziale in linea, quindi, noi vedremmo un valore basso in corrispondenza del punto di inizio,  $x = 0$ , e, via via, valori sempre più alti.

Matematicamente è ora un esponenziale crescente, la cui espressione matematica dovrebbe essere la seguente (R significa *riflessa*):

$$V_R(x) = V_R \cdot e^{\alpha x}$$

### 1.1.2 Il livello del segnale in $dB_m$ e l'attenuazione

Conoscendo le ampiezze dell'onda diretta di tensione e di corrente è possibile calcolare la *potenza* media, cioè l'energia media ad unità di tempo, richiesta al trasmettitore, e restituita al ricevitore. Ricordiamo, infatti, che la potenza media si calcola nel seguente modo:

$$P = V_{eff} \cdot I_{eff}$$

Nel punto iniziale,  $x = 0$ , l'ampiezza è:  $V_1 = V_D$  per cui si ha:

$$P_1 = \frac{V_D \cdot I_D}{2} = \frac{V_D^2}{2 \cdot Z_0}$$

In ambiente tecnico ed in particolare nelle telecomunicazioni, la potenza viene determinata in *unità logaritmiche*, riferendo la stessa ad una unità convenzionale, definita in modo standard a livello internazionale.

L'unità convenzionale di potenza nelle telecomunicazioni è:  $P_0 = 1 \text{ mW}$  e il relativo *livello* di potenza,  $L$ , è espresso in unità logaritmiche dette:  $dB_m$ , un acronimo che sta per: *decibel milliwatt*. Esso è così definito:

$$L = 10 \cdot \log_{10} \frac{P}{P_0}$$

Abbiamo allora, per  $x = 0$ :

$$L_1 = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_1}{P_0} \quad [dB_m]$$

Propagandosi lungo la linea il segnale si attenua, per cui giungerà all'altro capo con una ampiezza:  $V_2 = V_D \cdot e^{-\alpha L}$ , per cui si ha:

$$P_2 = \frac{V_D \cdot e^{-\alpha L} \cdot I_D \cdot e^{-\alpha L}}{2} = \frac{(V_D \cdot e^{-\alpha L})^2}{2 \cdot Z_0}$$

Abbiamo allora, per  $x = L$ :

$$L_2 = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_2}{P_0} \quad [dB_m]$$

Utilizzando le unità logaritmiche è facile calcolare l'attenuazione,  $A$ , del cavo, infatti si ha:

$$A = L_1 - L_2 \quad [dB]$$

Questa quantità è poco significativa, in quanto dipende dalla lunghezza del cavo. Risulta più significativa l'*attenuazione ad unità di lunghezza*,  $a$ , così definita:

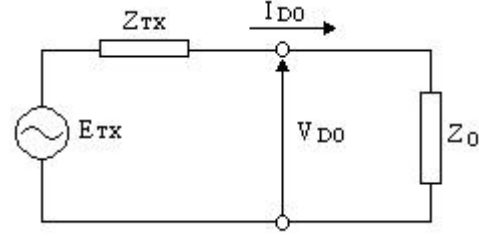
$$a = \frac{A}{L} = \frac{L_1 - L_2}{L} \quad \left[ \frac{dB}{m} \right]$$

Essa corrisponde, a parte un fattore di conversione<sup>1</sup> da  $\frac{dB}{m}$  a  $\frac{Np}{m}$ , con la costante di attenuazione  $\alpha$ .

## 1.2 La condizione per il massimo trasferimento di energia

All'interfaccia trasmettitore canale si può fare il modello elettrico seguente:

La linea vede il trasmettitore come un generatore  $E_{TX}$  con impedenza interna  $Z_{TX}$ , mentre per il trasmettitore la linea equivale ad un carico passivo pari alla sua impedenza caratteristica.



Le ampiezze,  $V_{D0}$  e  $I_{D0}$  dei segnali immessi in linea dal generatore, sono allora:

$$V_{D0} = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_{TX}} \cdot E_{TX} \quad I_{D0} = \frac{E_{TX}}{Z_0 + Z_{TX}}$$

Osservando l'espressione di  $V_{D0}$ , si deduce che, a parità di forza elettromotrice  $E_{TX}$ , il segnale immesso in linea è funzione del rapporto:  $\frac{Z_0}{Z_{TX}}$ , il quale a sua volta potrebbe dipendere dalla frequenza.

Ma se ciò avvenisse, dato che il segnale immesso, è, in base al teorema di Fourier, un insieme di armoniche con frequenze crescenti, per ciascuna componente tale rapporto sarebbe diverso e pertanto il segnale immesso in linea subirebbe una *distorsione*, denominata *distorsione di frequenza*, già al momento della sua immisione in linea.

Perché questo non accada bisogna che il rapporto delle impedenze non dipenda dalla frequenza, ovvero che sia una costante.

Si osserva, poi, che, se l'impedenza caratteristica prevale su  $Z_{TX}$ , cioè se il rapporto è elevato, allora l'ampiezza della tensione diventa massima, ma quella della corrente tende a zero e quindi il trasferimento di energia tra trasmettitore e linea è minimo.

Analogamente, si osserva che, se  $Z_{TX}$  prevale sull'impedenza caratteristica, cioè se il rapporto è molto basso, allora è l'ampiezza della tensione che diventa minima, e quindi il trasferimento di energia tra trasmettitore e linea è ancora minimo.

Nella ipotesi che le impedenze siano resistive, si dimostra, ad esempio con lo studio di funzione, che: *la condizione per il massimo trasferimento di energia tra*

---

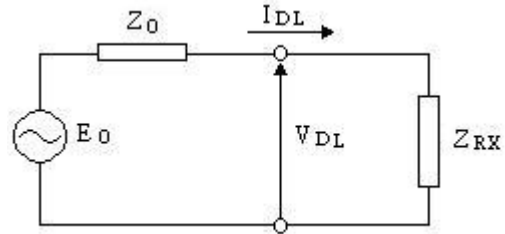
<sup>1</sup>(1  $\frac{Np}{km} \approx 8,686 \frac{dB}{km}$ )

trasmettitore e linea è che le due resistenze siano uguali<sup>2</sup>:

$$Z_{TX} = Z_0$$

Questa condizione è anche denominata: *condizione di adattamento tra trasmettitore e linea*.

Al lato ricevitore, d'altronde, il ricevitore stesso è visto dalla linea come un carico passivo  $Z_{RX}$ , mentre la linea è vista come un generatore avente impedenza interna pari ancora a  $Z_0$



Considerazioni analoghe comportano che, anche al lato del ricevitore, per avere il massimo trasferimento di energia, le due impedenze, nella ipotesi che siano resistive, debbano essere uguali:

$$Z_0 = Z_{RX}$$

Questa condizione come vedremo meglio in seguito, comporta anche che *tutto il segnale che si propaga verso il ricevitore venga da esso assorbito* e che quindi non si verifichi alcuna riflessione.

Anche per questo motivo la condizione viene denominata: *condizione di adattamento* tra ricevitore e linea.

## 1.3 Le costanti primarie e il modello elettrico di una linea

### 1.3.1 Le costanti primarie

Consideriamo un tratto di linea dal generico punto  $x$  al punto  $x + \Delta x$ , cioè di lunghezza  $\Delta x$  e ci chiediamo quali siano i parametri dei cavi che possono alterare la tensione e la corrente tra questi due punti. Osserviamo intanto che:

- i conduttori hanno una *resistenza*  $\Delta R$  che per quanto piccola, non è nulla e quindi su di essa verrà dissipata un pò di energia per effetto Joule;
- essendo, poi, i conduttori attraversati da corrente, si dovrà creare nello spazio circostante un campo magnetico, che per quanto piccolo è comunque diverso da zero. L'energia impiegata per la sua formazione dipende dalla *induttanza* propria  $\Delta L$  dei conduttori stessi, piccola, ma non nulla;

<sup>2</sup>Se le impedenze hanno una parte immaginaria, allora la condizione di massimo trasferimento di energia si raggiunge quando le parti resistive sono uguali e le parti reattive uguali ed opposte.



- la struttura costituita dai conduttori e dall'isolante è equivalente ad un condensatore, all'interno del quale si crea un campo elettrico, che, per quanto piccolo, non è nullo. L'energia utilizzata per la sua formazione dipende dalla *capacità*  $\Delta C$  presente tra i due conduttori, a sua volta legata alle caratteristiche geometriche del cavo, superficie dei conduttori e distanza tra di essi, e dalle proprietà dielettriche dell'isolante.
- infine consideriamo anche la eventualità che l'isolante che separa i due conduttori non sia ideale. Infatti la resistenza di isolamento dell'isolante è molto alta, ma non infinita. Questo comporta che, per lunghe distanze, un po' di corrente possa circolare attraverso l'isolante, comportando anche in questo caso la dissipazione di una certa quantità di energia per effetto Joule. La conducibilità dell'isolante la valutiamo attraverso la sua *conduttanza*  $\Delta G$ , data dall'inverso della resistenza di isolamento.

Queste quantità, però, non sono affatto costanti, ma sono *direttamente proporzionali* alla lunghezza del tratto di cavo considerato. Per avere delle quantità costanti le dobbiamo rapportare ad esso. Introduciamo allora le seguenti *quantità specifiche*, che chiamiamo *costanti primarie della linea*, così definite:

**Definizione 1.** : *costanti primarie di una linea elettrica*

- resistenza ad unità di lunghezza: *la resistenza propria dei cavi, rapportata al tratto considerato:*

$$l = \frac{\Delta L}{\Delta x} \left[ \frac{H}{m} \right]$$

- induttanza ad unità di lunghezza: *l'induttanza propria dei cavi, rapportata al tratto considerato:*

$$r = \frac{\Delta R}{\Delta x} \left[ \frac{\Omega}{m} \right]$$

- capacità ad unità di lunghezza: *la capacità tra i due cavi, rapportata al tratto considerato:*

$$c = \frac{\Delta C}{\Delta x} \left[ \frac{F}{m} \right]$$

- conduttanza ad unità di lunghezza: *l'inverso della resistenza di isolamento del materiale isolante, rapportata al tratto considerato:*

$$g = \frac{\Delta G}{\Delta x} \left[ \frac{\Omega^{-1}}{m} \right]$$

Come specificato, tutti i parametri sono rapportati ad un tratto di linea unitario e questo fa sì che il loro valore, sempre che la linea sia regolare, cioè costruita in modo che le sezioni, le distanze, i materiali si mantengano esattamente allo stesso valore lungo tutta la linea, non è influenzato dalla lunghezza del tratto considerato, né dalla sua posizione. In questo senso sono costanti <sup>3</sup>.

### 1.3.2 Il modello a costanti concentrate

Con le costanti primarie è possibile costruire un primo modello equivalente della linea, figura 5.

Per ottenerlo, indicata con  $L$  la lunghezza della linea, consideriamo la linea stessa come un unico tratto avente lunghezza  $\Delta x = L$  e costruiamo un modello equivalente, *concentrando* i parametri relativi a tutta la linea in un unico elemento, inserito nel modello in serie o in parallelo.

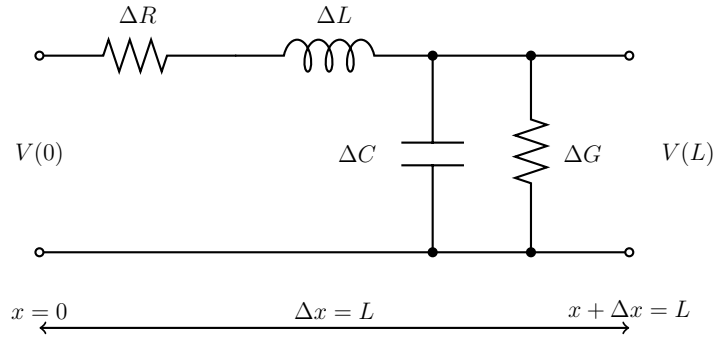


Figura 5: Modello della linea a costanti concentrate

Nel modello di figura 5 la resistenza e l'induttanza dei cavi sono inserite in serie in quanto proprie dei due conduttori metallici, mentre la capacità e la conduttanza sono messe in parallelo, in quanto sono presenti tra i due conduttori.

Secondo questo modello, la linea è un circuito risonante, il quale introduce un *effetto filtrante* sul segnale, di tipo *passa basso*, dovuto sia alla presenza del condensatore in parallelo, che della bobina in serie. Infatti la reattanza capacitiva dipende inversamente dalla frequenza, per cui, alle alte frequenze, il condensatore ha bassa reattanza ed è equivalente ad un interruttore chiuso. Essendo in parallelo tende a cortocircuitare l'uscita. La reattanza induttiva, invece, dipende direttamente dalla frequenza, per cui, alle alte frequenze, la bobina ha alta reattanza ed è un interruttore aperto. Essendo in serie, tende a staccare l'uscita dall'entrata.

Questo modello a costanti concentrate riproduce, però, solo approssimativamente il comportamento del tratto di linea considerato. In particolare esso non è in grado

<sup>3</sup>il loro valore, però, dipende in generale dalla *frequenza* del segnale immesso in linea

di prevedere, come si propaga il segnale da punto a punto lungo il cavo e non ci consente di ottenere una espressione dei suoi parametri.

### 1.3.3 Il modello a costanti distribuite

Per migliorare il modello, suddividiamo la linea in tratti  $\Delta x$  ed accorciamo la lunghezza di ciascun tratto, facendo tendere  $\Delta x$  a zero. Il modello che otteniamo, figura 6, detto a costanti *distribuite*, descrive il comportamento della linea localmente, in ciascun punto della stessa.

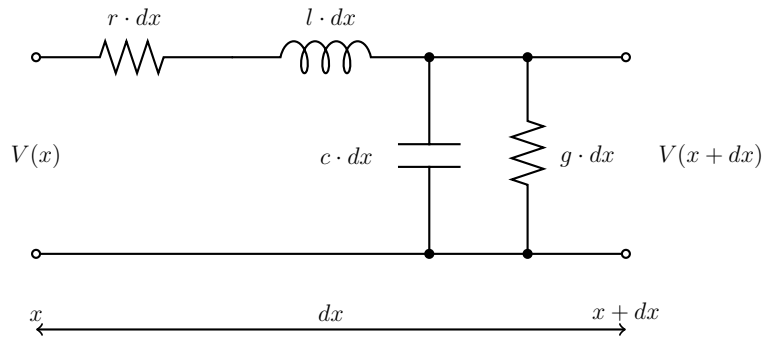


Figura 6: Modello a costanti distribuite

## 1.4 Le equazioni di propagazione

Per il tratto  $dx$  di linea considerato, la tensione e la corrente è alterata localmente dalla presenza dei parametri su definiti. Più precisamente, i parametri posti in serie, cioè sul percorso del segnale, ai capi dei quali si determina una caduta di potenziale, alterano la tensione, ma non la corrente <sup>4</sup>.

Invece i parametri posti in derivazione, tra l'uno e l'altro conduttore, alterano la corrente, deviando parte della corrente da un conduttore all'altro, ma non la tensione <sup>5</sup>.

### 1.4.1 Effetto sulla tensione

Per determinare l'effetto dei parametri sulla tensione basta considerare il modello semplificato di figura 7, con i soli parametri posti in serie, cioè  $r$  ed  $l$ .

Applichiamo, simbolicamente, il secondo principio di Kirchhoff e determiniamo la caduta di tensione sugli elementi presenti nel nostro modello (serie tra la

<sup>4</sup>Si ricorda che: i componenti in serie sono attraversati dalla stessa corrente

<sup>5</sup>Si ricorda che: i componenti in parallelo hanno ai loro capi la stessa differenza di potenziale

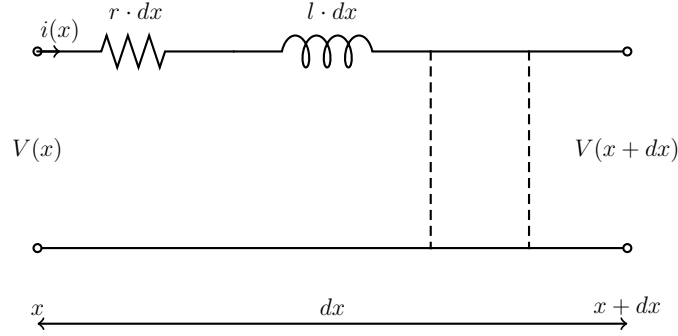


Figura 7: Modello semplificato per la determinazione dell'effetto sulla tensione

resistenza e la reattanza della bobina):

$$V(x) - V(x + dx) = (r \cdot dx + j\omega l \cdot dx) \cdot i(x) = z \cdot dx \cdot i(x)$$

La quantità:

$$z = r + j\omega l \quad \left[ \frac{\Omega^{-1}}{m} \right]$$

è l'*impedenza ad unità di lunghezza*, opposta dai parametri che nel modello si presentano in serie.

Dividendo ambo i membri per  $dx$ , si ottiene (nel primo membro c'è, a parte il segno, un rapporto incrementale):

$$\frac{dV(x)}{dx} = -z \cdot i(x)$$

Abbiamo ottenuto una equazione, chiamata *equazione di propagazione del potenziale*, dove compare a primo membro la derivata del potenziale fatta rispetto ad  $x$ , che è una lunghezza. Una tale derivata viene denominata *gradiente*, in quanto stabilisce la gradazione con cui varia il potenziale da punto a punto lungo la linea. L'equazione stabilisce che:

*la variazione da punto a punto del potenziale è direttamente proporzionale alla corrente che scorre in quel punto.*

#### 1.4.2 Effetto sulla corrente

Per determinare l'effetto sulla corrente, consideriamo nel modello soltanto i parametri che influiscono sulla corrente, cioè  $c$  e  $g$ , come in figura 8.

Ricaviamo prima, simbolicamente, il parallelo,  $Z_p$ , tra la reattanza del condensatore e la resistenza di isolamento:

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{R_{is}} + \frac{1}{X_c} = g \cdot dx + j\omega c \cdot dx = y \cdot dx$$

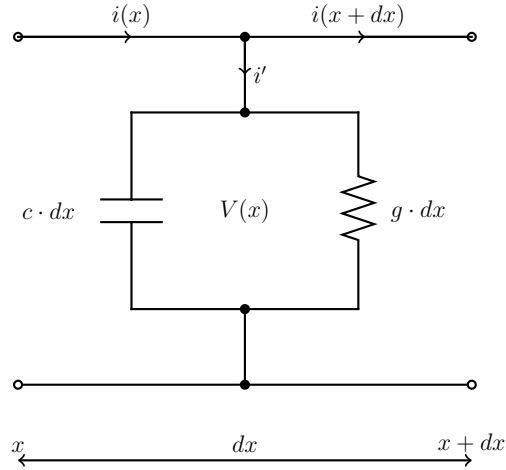


Figura 8: Modello semplificato per la determinazione dell'effetto sulla corrente

La quantità:

$$y = g + j\omega c \left[ \frac{\Omega^{-1}}{m} \right]$$

è l'*ammettenza ad unità di lunghezza*, opposta dai parametri che nel modello si presentano in parallelo. L'ammettenza corrisponde all'inverso dell'impedenza. Applichiamo il primo principio di Kirchhoff e determiniamo, simbolicamente, la quantità di corrente deviata da un conduttore all'altro:

$$i' = i(x) - i(x + dx) = \frac{V(x)}{Z_p} = y \cdot dx \cdot V(x)$$

Dividendo ambo i membri per  $dx$ , si ottiene (nel primo membro c'è ancora, a parte il segno, un rapporto incrementale):

$$\frac{di(x)}{dx} = -y \cdot V(x)$$

Abbiamo ottenuto una seconda equazione, chiamata *equazione di propagazione della corrente*, dove compare a primo membro la derivata della corrente fatta rispetto ad  $x$ , che è una lunghezza. Anche questa derivata corrisponde ad un gradiente, stabilendo la gradazione con cui varia la corrente da punto a punto lungo la linea. L'equazione stabilisce che:

*la variazione da punto a punto della corrente è direttamente proporzionale al potenziale presente in quel punto.*

## 1.5 Le soluzioni delle equazioni di propagazione

Riprendiamo le due equazioni trovate:

$$\begin{cases} \frac{dV(x)}{dx} = -z \cdot i(x) \\ \frac{di(x)}{dx} = -y \cdot V(x) \end{cases}$$

Esse costituiscono un sistema di equazioni coinvolgente sia la tensione che la corrente. C'è, però, un problema: se cerchiamo di ricavare la tensione dalla prima equazione, vediamo che essa dipende dalla corrente, ma andando a ricavare la corrente nella seconda equazione, troviamo che essa dipende dalla tensione. Per risolvere il sistema dobbiamo prima trasformarlo in modo da avere una equazione solo per la tensione ed una solo per la corrente. A tale scopo, usando il metodo di sostituzione, ricaviamo la corrente dalla prima equazione e la sostituiamo nella seconda. Questa operazione ci costringe a derivare due volte il potenziale. Otteniamo:

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = z \cdot y \cdot V(x)$$

La quale è un' equazione che coinvolge solo il potenziale.

Ricaviamo, poi, il potenziale dalla seconda e lo sostituiamo nella prima. Questa operazione ci fa derivare due volte la corrente. Otteniamo:

$$\frac{d^2i(x)}{dx^2} = z \cdot y \cdot i(x)$$

La quale è un' equazione che coinvolge solo la corrente.

Osserviamo, intanto, la somiglianza tra le due equazioni: in pratica è la stessa equazione, corrispondente alla cosiddetta *equazione delle onde*. Infatti essa è perfettamente compatibile con le funzioni seno e coseno (partendo ad esempio dal seno, e derivando otteniamo il coseno; derivando ancora riotteniamo nuovamente il seno), che, come sappiamo, hanno il caratteristico andamento ondulatorio. Se il nostro modello funziona, risolvendo queste equazioni dovremmo trovare che tensione e corrente hanno in linea un andamento di tipo esponenziale decrescente.

Cerchiamo allora la soluzione per la tensione, con la prima equazione:

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = z \cdot y \cdot V(x)$$

Ipotizziamo che il trasmettitore immette in linea l'onda diretta:  $V_D(x)$  il cui andamento sia un esponenziale decrescente, con un certo coefficiente  $\gamma$ :

$$V_D(x) = V_{D0} \cdot e^{-\gamma x}$$

Derivando due volte e sostituendo nella equazione di partenza, otteniamo:

$$V_D(x)'' = -\gamma^2 \cdot V_{D0} \cdot e^{-\gamma x} = z \cdot y \cdot V_{D0} \cdot e^{-\gamma x}$$

Da cui risulta:

$$\gamma = \sqrt{z \cdot y}$$

Essendo  $z$  ed  $y$  quantità complesse, anche  $\gamma$  risulta complessa, per cui possiamo scrivere:

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

La quantità  $\gamma$  che compare ad esponente nell'espressione dell'onda diretta, determina le caratteristiche di propagazione del segnale, non solo in relazione alla *attenuazione*, ma anche allo *sfasamento*.

**Definizione 2.** *Si definisce costante di propagazione la quantità costante gamma.*

Essa è una *costante secondaria* della linea. Il suo valore, infatti, dipende dalle costanti primarie della linea, e dalla frequenza del segnale.

La parte reale di  $\gamma$ , indicata con  $\alpha$ , è chiamata: *costante di attenuazione* in quanto determina l'attenuazione dell'ampiezza della tensione in linea.

La parte immaginaria di  $\gamma$ , invece, indicata con  $\beta$ , è chiamata: *costante di fase* in quanto determina uno sfasamento della tensione, nel punto  $x$ , rispetto al punto iniziale, dovuto al ritardo di propagazione.

### 1.5.1 L'impedenza caratteristica

Rifacendo lo stesso identico procedimento per la seconda equazione differenziale, relativa alla corrente, si ottiene :

$$i_D(x) = I_{D0} \cdot e^{-\gamma x}$$

Dunque il trasmettitore immette in linea le due onde:

$$\begin{cases} V_D(x) = V_{D0} \cdot e^{-\gamma x} \\ i_D(x) = I_{D0} \cdot e^{-\gamma x} \end{cases}$$

Eseguendo il rapporto tra  $V_D(x)$  e  $i_D(x)$ , otteniamo:

$$\frac{V_D(x)}{i_D(x)} = \frac{V_{D0}}{I_{D0}}$$

Quindi il rapporto tra le ampiezze della tensione e della corrente è una costante indipendente da  $x$ , ovvero dal particolare punto della linea considerato. Tale rapporto ha le dimensioni di una *impedenza* e per questa ragione è chiamato: *impedenza caratteristica*,  $Z_0$ , della linea, definita nel seguente modo:

**Definizione 3.** Si definisce impedenza caratteristica,  $Z_0$ , di una linea elettrica, il rapporto costante tra le ampiezze della tensione diretta e della corrente diretta, in un qualunque punto della linea.

Per determinare la sua espressione sostituiamo le espressioni di tensione e corrente in una delle equazioni di propagazione, ad esempio nella prima:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -z \cdot i(x)$$

Otteniamo:

$$\frac{d[V_{D0} \cdot e^{-\gamma x}]}{dx} = -\gamma V_{D0} \cdot e^{-\gamma x} = -z \cdot I_{D0} \cdot e^{-\gamma x}$$

Ovvero:

$$Z_0 = \frac{V_{D0}}{I_{D0}} = \frac{z}{\gamma} = \sqrt{\frac{z}{y}}$$

La conoscenza del suo valore consente di determinare l'ampiezza,  $I_{D0}$ , della corrente richiesta dalla linea. Anche  $Z_0$  è una *costante secondaria* della linea. Anche il suo valore, infatti, dipende dalle costanti primarie della linea e dalla frequenza del segnale.

### 1.5.2 Linea senza perdite

In generale, abbiamo osservato, l'impedenza caratteristica e la costante di propagazione potrebbero dipendere dalla *frequenza* del segnale immesso in linea.

Ciò, però, non deve succedere, altrimenti, cambiando la frequenza del segnale, cambierebbe completamente il comportamento del cavo.

Per evitare questo inconveniente bisogna costruire il cavo con caratteristiche specifiche molto particolari. Ciò differenzia qualitativamente un cavo per telecomunicazioni da un cavo qualsiasi.

Esaminiamo come primo caso, un cavo sostanzialmente *ideale*, dove i parametri di tipo resistivo sono nulli. Supponiamo che sia, cioè:  $r = 0$  e  $g = 0$ . Una linea con queste caratteristiche ideali è chiamata: *linea senza perdite*. Naturalmente una linea di questo tipo non esiste nella realtà, ma è comunque possibile cercare di realizzare i cavi in modo che la componente resistiva abbia valore più basso possibile e sia comunque molto minore della parte reattiva. Per una linea senza perdite si ha:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{0 + j\omega l}{0 + j\omega c}} = \sqrt{\frac{l}{c}}$$

$$\gamma = \sqrt{z \cdot y} = \sqrt{-\omega^2 \cdot lc} = j\omega\sqrt{lc}$$



Abbiamo il notevole risultato che l'impedenza caratteristica dipende *solo* dai parametri reattivi del cavo.

Invece la costante di propagazione ha un valore immaginario. Questo significa che in linea non c'è affatto attenuazione, ma vi è invece un ritardo di propagazione ed un conseguente sfasamento tra la tensione all'inizio della linea e la tensione al punto  $x$ .

### 1.5.3 La condizione di Heaviside

Abbiamo detto che nella realtà i parametri resistivi, per quanto piccoli, hanno comunque un valore diverso da zero, per cui il risultato trovato precedentemente è solo una approssimazione. Heaviside si rese conto che conviene comunque fare in modo che i componenti resistivi assumano valori *proporzionati* con le rispettive parti reattive e propose la seguente condizione da seguire nella realizzazione dei cavi per telecomunicazioni:

$$r : l = g : c$$

Applicando la condizione di Heaviside, si ottiene, per l'impedenza caratteristica:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}} = \sqrt{\frac{l \cdot (\frac{r}{l} + j\omega)}{c \cdot (\frac{g}{c} + j\omega)}} = \sqrt{\frac{l}{c}}$$

Quindi esattamente lo stesso valore, costante, che si ha per la linea senza perdite.

Applicando, invece, la condizione di Heaviside per il calcolo della costante di propagazione, e posto:

$$\frac{r}{l} = \frac{g}{c} = \sqrt{\frac{r \cdot g}{l \cdot c}}$$

si ottiene:

$$\gamma = \sqrt{z \cdot y} = \sqrt{lc \cdot (\frac{r}{l} + j\omega) \cdot (\frac{g}{c} + j\omega)} = \sqrt{lc \cdot (\sqrt{\frac{rg}{lc}} + j\omega)^2} = \sqrt{rg} + j\omega\sqrt{lc}$$

Questa volta la costante di propagazione è una quantità complessa:

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

La sua parte reale, la *costante di attenuazione*, ha espressione:

$$\alpha = \sqrt{rg}$$

Come era logico aspettarsi essa dipende dalle costanti resistive ed è tanto più piccola quanto più esse sono piccole. La sua parte immaginaria, invece, la *costante di fase*, ha espressione:

$$\beta = \omega\sqrt{lc}$$

Essa ha la stessa espressione che aveva per la linea senza perdite. La condizione di Heaviside, con l'eccezione della costante di attenuazione, consente di ricondurre i parametri della linea ai valori che avrebbe la stessa se fosse senza perdite.

#### 1.5.4 L'onda diretta

Abbiamo visto che l'onda immessa dal trasmettitore in linea ha la seguente espressione matematica:

$$V_D(x) = V_D \cdot e^{-\gamma \cdot x} = V_D \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{-j\beta \cdot x}$$

Separando i termini di esponenziale reale, dipendente da  $\alpha$  e di esponenziale immaginario, dipendente da  $j\beta$ , riconducibile, con le formule di Eulero, alle funzioni seno e coseno, da cui si evidenzia il termine ondulatorio dell'onda.

Il primo termine,  $V_{D0}$ , rappresenta l'ampiezza della tensione all'inizio del cavo, così come è fornito dal trasmettitore. In altre parole, il segnale immesso dal trasmettitore è un segnale alternato cosinusoidale con ampiezza,  $V_{D0}$ , e frequenza  $f$ . Il secondo è il termine di *attenuazione*, per cui nel punto  $x$ , l'ampiezza della tensione diventa:  $V_{D0} \cdot e^{-\alpha \cdot x}$ .

Il terzo termine, l'esponenziale a esponente immaginario, è un fattore di fase, che determina una *rotazione*, in ritardo, del vettore rappresentativo della tensione nel punto  $x$  della quantità:  $-\beta \cdot x$

Tenendo presenti le formule di Eulero:

$$e^{-j\beta \cdot x} = \cos(\beta \cdot x) - j \cdot \sin(\beta \cdot x)$$

possiamo scomporre  $V_D(x)$  nella sua parte reale e nella sua parte immaginaria:

$$V_D(x) = V_{D0} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) + j \cdot V_{D0} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x)$$

Per rappresentare graficamente  $V_D(x)$ , avremmo bisogno di tre assi: un asse per la parte reale, un asse per la parte immaginaria ed un terzo asse per le posizioni  $x$ . Di fatto ci si limita a rappresentare solo una delle due componenti, ad esempio la parte reale:

$$\text{Re}(V_D(x)) = V_{D0} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x)$$

il cui andamento è il seguente:

È importante far mente locale sul fatto che il grafico di figura 9 rappresenta la distribuzione<sup>6</sup> del potenziale lungo la linea nell'istante  $t = 0$ . In un certo senso il grafico coglie come in una foto istantanea l'insieme dei potenziali *in un dato*

---

<sup>6</sup>Possiamo risalire alla dipendenza temporale, ricordando che, dato un certo valore simbolico  $\bar{V}$ , si ha, usando il coseno:  $V(t) = \text{modulo}(\bar{V}) \cdot \cos[\omega \cdot t + \text{fase}(\bar{V})]$ . Per l'onda diretta otteniamo:  $V_D(x, t) = V_D \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot x)$

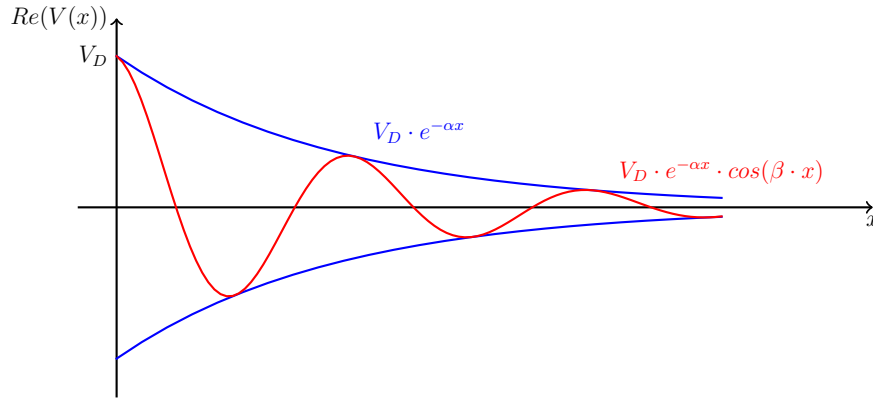


Figura 9: Parte reale dell'onda diretta di tensione

*istante*, ma già nell'istante successivo questa distribuzione cambia.

La curva di figura 9 ci consente solo di immaginare questi andamenti, a partire dall'istante  $t = 0$ .

Nel punto iniziale della linea, in cui  $x = 0$ , la tensione oscilla nel tempo con la legge del segnale immesso dal trasmettitore, tra i punti  $+V_D$  e  $-V_D$ , avendo come valore iniziale  $+V_D$ .

Spostandoci verso destra di una generica distanza  $x$ , la tensione varia ancora nel tempo con la stessa legge del segnale immesso in linea dal trasmettitore, ma ora oscilla tra i punti appartenenti alle linee di inviluppo, in azzurro:  $+V_D \cdot e^{-\alpha x}$  e  $-V_D \cdot e^{-\alpha x}$ , avendo come valore iniziale il valore della funzione:  $V_D \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$ .

Alla distanza  $\frac{\lambda}{4}$  dal trasmettitore, ci sarà uno sfasamento di  $90^\circ$ ;

Alla distanza  $\frac{\lambda}{2}$  lo sfasamento è di  $180^\circ$ ;

Alla distanza  $\frac{3}{4}\lambda$  dal trasmettitore, ci sarà uno sfasamento di  $270^\circ$ ;

Alla distanza  $\lambda$ , infine, lo sfasamento è di  $360^\circ$ . E così via.

Cosa succede globalmente alla distribuzione dopo un dato tempo  $t$ ?

Per fissare le idee supponiamo  $t$  pari a un quarto del periodo di oscillazione. Vediamo che: nel punto iniziale, la tensione è zero; a distanza  $\frac{\lambda}{4}$  invece è massima; a distanza  $\frac{\lambda}{2}$  è di nuovo zero; a distanza  $\frac{3}{4}\lambda$  è minima; a distanza  $\lambda$  è ancora zero. Possiamo vedere la distribuzione dopo un quarto di periodo in figura 10.

Esaminando la figura si osserva che, globalmente, la distribuzione dei potenziali in linea, dopo un quarto di periodo si è spostata verso il ricevitore, rispetto alla posizione che aveva precedentemente. Si comporta a tutti gli effetti come un'onda. Il fenomeno può essere comparato, se si vuole, al moto ondoso vicino ad una spiaggia. Le creste dell'onda si hanno nei punti dove attualmente il potenziale è massimo, e in istanti successivi si spostano di lato, proprio dove precedentemente il potenziale era minimo.

Analogamente per la corrente.

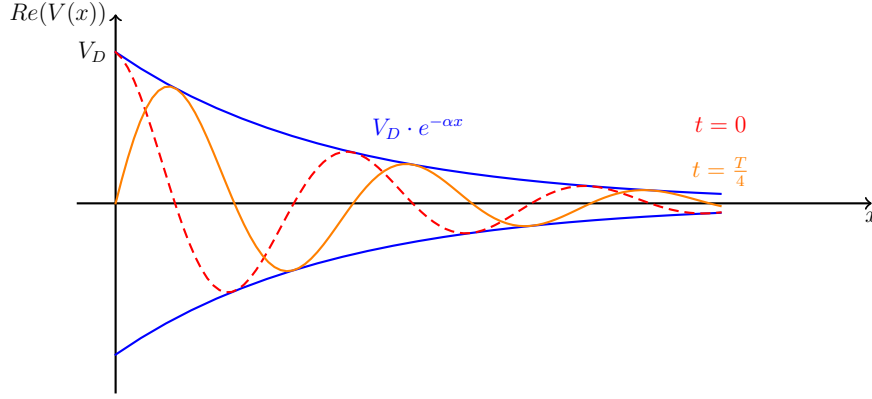


Figura 10: Parte reale dell'onda diretta dopo  $\frac{1}{4}$  di periodo

### 1.5.5 La lunghezza d'onda e la velocità di propagazione

L'onda di tensione, come anche l'onda di corrente, si spostano dal trasmettitore al ricevitore con una propria velocità. Si introduce ora l'importante concetto di *lunghezza d'onda*, necessario per determinarne la velocità.

**Definizione 4.** Si definisce lunghezza d'onda,  $\lambda$ , la distanza percorsa dall'onda nel suo periodo di ripetizione.

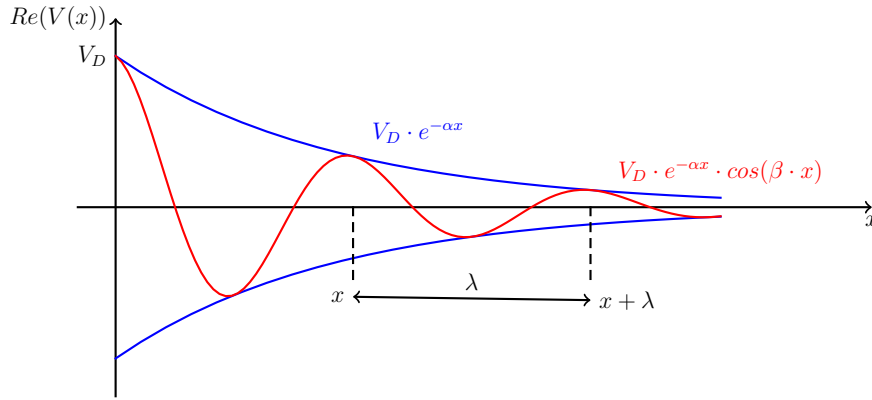


Figura 11: La lunghezza d'onda

Dal grafico di figura 11 vediamo che, al periodo  $T$ , ciascun picco della distribuzione va a sovrapporsi con il picco successivo, per cui la lunghezza d'onda,  $\lambda$ , corrisponde lungo  $x$  alla distanza compresa tra due picchi dell'onda. Allora, calcolando il coseno in queste due posizioni, cioè nella posizione  $x$  e nella posizione  $x + \lambda$ , si deve per forza ottenere lo stesso valore. Deve cioè essere:

$$\cos(\beta x) = \cos(\beta(x + \lambda))$$

Questo è possibile essendo il coseno una funzione periodica di periodo  $2\pi$ . Si ottiene:

$$\beta \cdot \lambda = 2\pi$$

ovvero:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

Possiamo ora determinare la velocità dell'onda,  $u$ , la quale sarà data dal rapporto tra la distanza percorsa dall'onda nell'unità di tempo. Prendendo come unità di tempo proprio il periodo di oscillazione, la distanza percorsa è  $\lambda$ , per cui si ha:

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = \frac{2\pi f}{\beta}$$

Il risultato notevole che si è ottenuto è che la velocità dell'onda è una funzione della frequenza del segnale! (Tenere ben presente che anche  $\beta$  dipende dalla frequenza). Non si tratta di un risultato lusinghiero, intanto perchè così la velocità rischia di non essere quella massima consentita, cioè la velocità della luce, e poi perchè, essendo il nostro segnale in realtà un pacchetto di armoniche a frequenze tra loro vicine, ma diverse, ognuna di tali armoniche viaggerà ad una propria velocità, diversa da quella delle altre, raggiungendo il ricevitore in momenti successivi e quindi modificando il proprio rapporto di fase con le altre armoniche stesse. La distorsione indotta sul segnale da una velocità di propagazione non costante viene chiamata *distorsione di fase*. Il segnale che il ricevitore ricostruisce sarà allora diverso da quello lanciato dal trasmettitore.

Se, però, il cavo è realizzato rispettando la condizione di Heaviside, allora si ha il seguente risultato notevole:

$$u = \frac{2\pi f}{\omega\sqrt{lc}} = \frac{1}{\sqrt{lc}}$$

La velocità è diventata indipendente dalla frequenza<sup>7</sup>, dipendendo solo da  $l$  e da  $c$ .

Si potrebbe pensare di aumentare la velocità fin che si vuole, riducendo progressivamente il valore di queste costanti, ma ciò non può essere fatto all'infinito. Infatti la velocità di propagazione non può mai superare la velocità della luce nel vuoto e ciò significa che, ad un certo punto, se si cerca di diminuire ulteriormente  $l$ , si verifica un aumento di  $c$  mentre, se si cerca di diminuire ulteriormente  $c$ , si verifica un aumento di  $l$ .

Conoscendo la velocità possiamo ricavare il ritardo di propagazione,  $t_D$ , cioè il tempo che ci impiega l'onda per attraversare il cavo in tutta la sua lunghezza,  $L$ ,

---

<sup>7</sup>nei limiti entro cui il prodotto delle costanti  $l$  e  $c$  è costante

dal trasmettitore al ricevitore. Essendo:

$$velocità = \frac{spazio}{tempo}$$

si ricava:

$$t_D = \frac{L}{u}$$

### 1.5.6 Linea lunga

Ci proponiamo in questo paragrafo di stabilire quando una linea debba considerarsi lunga. Per poter rispondere al quesito bisogna disporre di un parametro di paragone, rispetto al quale paragonare la lunghezza della linea.

Come parametro di paragone viene presa, per omogeneità, la lunghezza d'onda  $\lambda$ . Esaminiamo i seguenti casi:

#### 1. $L > \lambda$

In questo caso, propagandosi attraverso la linea, l'onda immessa dal trasmettitore fa in tempo ad attenuarsi ed anche a sfasarsi più di un giro completo. Gli effetti della propagazione sul segnale sono quindi sicuramente pesanti e la linea deve essere considerata lunga.

#### 2. $L \ll \lambda$

Concretamente possiamo considerare  $L$  molto minore della lunghezza d'onda, quando è inferiore a  $\frac{\lambda}{10}$ . Propagandosi attraverso la linea, l'onda non fa in tempo ad attenuarsi significativamente e si sfasa di meno di  $45^\circ$ . Gli effetti della propagazione sul segnale sono quindi blandi e la linea può essere considerata corta.

#### 3. $L \approx \lambda$

La linea è dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda, quando è leggermente più piccola, o quando è leggermente più grande. In questo caso è comunque possibile uno sfasamento significativo dell'onda immessa dal trasmettitore. Lo sfasamento comincia a diventare rilevante, quando è almeno dell'ordine di grandezza di  $45^\circ$ , cioè quando risulta:  $L > \frac{\lambda}{8}$ . Gli effetti della propagazione sul segnale cominciano a farsi sentire e la linea deve essere considerata lunga.

A conclusione della nostra analisi, possiamo dire che una linea va considerata lunga quando la sua lunghezza è una frazione significativa della lunghezza d'onda, per fissare le idee, quando risulta:  $L > \frac{\lambda}{8}$ .

L'analisi ha il seguente importante risvolto: una stessa linea è corta per alcune

frequenze, mentre è lunga per altre. Il motivo è che, la lunghezza d'onda non è affatto costante, ma è inversamente proporzionale alla frequenza.

Vediamo questo apparente paradosso con un esempio.

Sappiamo che uno dei parametri cruciali di un elaboratore è la sua capacità di calcolo, corrispondente al numero di operazioni eseguite al secondo, la quale dipende dalla frequenza del clock, che ovviamente si cerca di incrementare costantemente. Attualmente un buon elaboratore opera con un clock di almeno 3GHz.

Naturalmente una scheda madre è fatta di tanti componenti, interconnessi con minuscole piste elettriche, che altro non sono che delle linee elettriche, seppure, almeno apparentemente, cortissime. La domanda è: queste 'piste' vanno considerate linee corte o linee lunghe?

Per rispondere al quesito calcoliamo la lunghezza d'onda, supponendo che sulle piste viaggino segnali numerici alla frequenza del clock. Si ottiene, considerando una velocità tipica di  $\frac{2}{3}c$ :

$$\lambda \leq \frac{2 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^9} = 0,066 \text{ m} = 6,6 \text{ cm}$$

Una pista di questa lunghezza è sicuramente lunga, ma va considerata lunga anche una pista di solo 1 cm o meno! Quanto più la frequenza aumenta, tanto più le piste, apparentemente corte, sono, in realtà, da considerarsi lunghe. Nell'ultimo decennio molte delle schede elettroniche devono essere progettate facendo attenzione alle caratteristiche delle piste, come se fossero a tutti gli effetti delle linee elettriche di comunicazione.

## 1.6 Onda riflessa e onda stazionaria

### 1.6.1 La riflessione come fenomeno

Facciamo riferimento alla figura 12, nel quale è stato riportato il circuito equivalente del trasmettitore e del ricevitore.

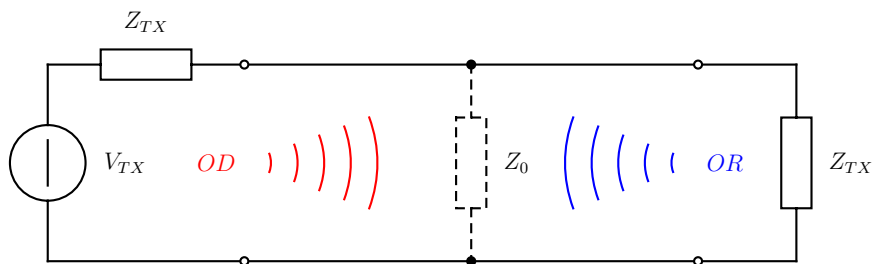


Figura 12: Linea elettrica bifilare con circuiti equivalenti del TX e del RX

Le onde dirette di tensione e corrente,  $V_D(x)$  e  $i_D(x)$ , si propagano lungo la linea, con ampiezze tali che il loro rapporto è, in ogni punto, pari all'impedenza

caratteristica.

Quando raggiungono il ricevitore, l'impedenza cambia improvvisamente, dovendo corrispondere all'impedenza equivalente del ricevitore. Ma ciò significa che le due onde, in generale, non possono essere completamente assorbite dal ricevitore, altrimenti la legge di Ohm verrebbe violata, a meno che l'impedenza del ricevitore non sia uguale a quella della linea. Deduciamo, dalla nostra analisi qualitativa, la seguente condizione:

**Condizione 1.** *di adattamento del ricevitore*

*Condizione affinché l'onda diretta sia completamente assorbita dal ricevitore è che l'impedenza equivalente del ricevitore,  $Z_{RX}$ , sia uguale alla impedenza caratteristica,  $Z_0$ , della linea.*

$$Z_{RX} = Z_0$$

La parte dell'onda che non può essere assorbita dal ricevitore, invece, viene *riflessa verso il trasmettitore*, propagandosi a ritroso nella linea.

Quando l'onda riflessa raggiunge il trasmettitore, quest'ultimo oppone la sua impedenza equivalente e, se quest'ultima è diversa da quella della linea, si ha una ulteriore riflessione. Deduciamo una seconda condizione:

**Condizione 2.** *di adattamento del trasmettitore*

*Condizione affinché la quota di onda riflessa sia completamente assorbita dal trasmettitore è che anche l'impedenza equivalente del trasmettitore,  $Z_{TX}$ , sia uguale alla impedenza caratteristica,  $Z_0$ , della linea.*

$$Z_{TX} = Z_0$$

In pratica si crea riflessione in ogni punto in cui c'è una situazione di *disadattamento*. Nel seguito supponiamo che ci sia disadattamento solo al lato del ricevitore e che quello sia il punto in cui si origina l'onda riflessa.

### 1.6.2 L'espressione e parametri dell'onda riflessa

Sappiamo che, matematicamente l'onda riflessa è la soluzione delle equazioni di propagazione, con il termine esponenziale ad esponente positivo. Avremo, per tensione e corrente:

$$\begin{cases} V_R(x) = V_R \cdot e^{\gamma x} \\ i_R(x) = i_R \cdot e^{\gamma x} \end{cases}$$

Ad esempio, la parte reale dell'onda riflessa di tensione:

$$Re(V_R(x)) = V_R \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x)$$

ha l'andamento riportato nella figura 13.



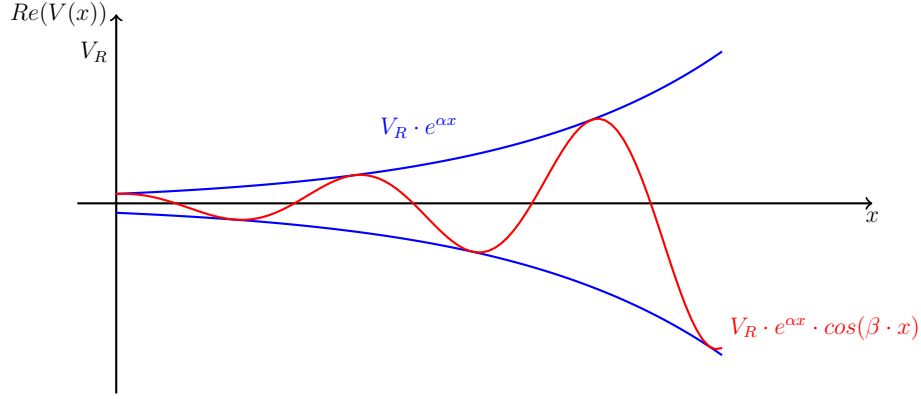


Figura 13: Parte reale dell'onda riflessa di tensione

Anche il grafico di figura 13 rappresenta la distribuzione<sup>8</sup> del potenziale lungo la linea nell'istante  $t = 0$ .

Ad esempio, all'inizio della linea, per  $x = 0$ , avremo:  $V_R(0) = V_R$  e  $i_R(0) = I_R$ , mentre all'altro capo della linea, per  $x = L$ , avremo:  $V_R(L) = V_R \cdot e^{\gamma L}$  e  $i_R(L) = I_R \cdot e^{\gamma L}$ , con il secondo valore maggiore del primo.

Ci aspettiamo che il rapporto delle loro ampiezza dia ancora  $Z_0$  ed andiamo a verificarlo usando una delle equazioni di propagazione:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -z \cdot i(x)$$

sostituiamo:

$$\frac{d[V_R \cdot e^{\gamma x}]}{dx} = -z \cdot i_R \cdot e^{\gamma x}$$

semplifichiamo e otteniamo:

$$\frac{V_R}{I_R} = -Z_0$$

Abbiamo ottenuto il risultato che ci aspettavamo, salvo un segno negativo.

Quale è il senso di questo segno meno ?

Esso è la conseguenza del fatto che l'onda riflessa si propaga a ritroso, quindi il verso *reale* della corrente va dal  $RX$  al  $TX$ , mentre il verso *convenzionale* è stato preso dal  $TX$  al  $RX$ . Noi, per comodità, continueremo ad usare il verso convenzionale.

---

<sup>8</sup>Possiamo risalire alla dipendenza temporale, ricordando ancora che, dato un certo valore simbolico  $\bar{V}$ , si ha, usando il coseno:  $V(t) = \text{modulo}(\bar{V}) \cdot \cos[\omega \cdot t + \text{fase}(\bar{V})]$ . Per l'onda riflessa otteniamo:  $V_R(x, t) = V_R \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot x)$

### 1.6.3 L'indice di riflessione

Ritorniamo sul fenomeno della riflessione che supponiamo verificarsi al lato del ricevitore. Come sappiamo, il trasmettitore lancia in linea le onde dirette di tensione e di corrente, le cui ampiezze, entrano con i valori noti<sup>9</sup>:

$$V_D \mid I_D$$

ed escono con i valori che indichiamo con:

$$V_{DL} \mid I_{DL}$$

anch'essi determinabili, noto il valore di  $L$  e della costante di propagazione. L'onda riflessa, invece, si crea nel punto  $L$ , con ampiezze che indichiamo con:

$$V_{RL} \mid I_{RL}$$

Di queste ampiezze possiamo intanto dire che sono una *frazione* delle corrispondenti ampiezze dell'onda diretta e che sono in *proporzione* con essa. Infatti, raddoppiando l'ampiezza dell'onda incidente, ci aspettiamo che anche l'ampiezza dell'onda riflessa raddoppi. Pertanto *il loro rapporto deve essere una costante*.

A tale scopo si introducono due quantità o indici, così definiti:

**Definizione 5.** Si definisce indice di riflessione di tensione,  $k_v$ , il rapporto costante tra l'ampiezza dell'onda riflessa di tensione, nel punto in cui si origina, e l'ampiezza dell'onda diretta, nel medesimo punto.

$$k_v = \frac{V_{RL}}{V_{DL}}$$

Analogamente:

**Definizione 6.** Si definisce indice di riflessione di corrente,  $k_i$ , il rapporto costante tra l'ampiezza dell'onda riflessa di corrente, nel punto in cui si origina, e l'ampiezza dell'onda diretta, nel medesimo punto.

$$k_i = \frac{I_{RL}}{I_{DL}}$$

Si verifica subito, però, che:

$$k_i = \frac{-\frac{V_{RL}}{Z_0}}{\frac{V_{DL}}{Z_0}} = -k_v$$

In pratica l'indice di riflessione è unico, essendo però opposto per la corrente, rispetto alla tensione.

---

<sup>9</sup>il primo è stabilito dal trasmettitore ed il secondo è legato alla impedenza caratteristica della linea

### 1.6.4 L'onda stazionaria

Se, come nella nostra ipotesi, il ricevitore non è adattato e c'è onda riflessa, allora l'onda riflessa, propagandosi a ritroso, si sovrappone all'onda diretta, dando luogo ad una risultante che è chiamata: *onda stazionaria*. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha infatti:

$$\begin{cases} V_T(x) = V_D(x) + V_R(x) \\ i_T(x) = i_D(x) + i_R(x) \end{cases}$$

Per comprendere intuitivamente a cosa porti la sovrapposizione delle due onde, in un punto dato  $x$ , immaginiamo il caso di due masse che convergono nel punto  $x$  da direzioni opposte. Se la loro dimensione è la stessa, allora i due movimenti si annullano vicendevolmente e le due masse si compenetrano l'una con l'altra<sup>10</sup>. Anche nel caso delle onde, i movimenti contrapposti e di pari intensità, dell'onda diretta e dell'onda riflessa, danno come risultante assenza di movimento. In pratica l'energia delle due onde è costretta a *stazionare* nella linea, da cui il nome.

Però le due onde possono convergere in dato punto, essendo l'una rispetto all'altra con rapporto di fase qualsiasi ed allora l'effetto è completamente diverso a seconda, appunto, della loro differenza di fase. Distinguiamo le seguenti situazioni, per onde della stessa intensità:

- le due onde convergono nel punto  $x$ , essendo *in fase* tra loro. In questo caso l'effetto complessivo è doppio, ovvero l'onda complessiva oscilla con ampiezza più grande dell'ampiezza dell'onda diretta, addirittura doppia. Si dice che c'è stata *interferenza costruttiva* o anche che l'onda stazionaria presenta un *ventre*.
- ci spostiamo in un'altra posizione, in modo che le due onde convergono nel nuovo punto  $x'$ , essendo *in opposizione di fase* tra loro. In questo caso l'effetto complessivo è nullo, ovvero l'onda complessiva oscilla con ampiezza minima o nulla, minore dell'ampiezza dell'onda diretta. Si dice che c'è stata *interferenza distruttiva* o anche che l'onda stazionaria presenta un *nodo*.
- in tutti gli altri punti, in cui non sono nè in fase, nè in opposizione di fase. In questo caso l'effetto complessivo è intermedio.

In definitiva l'onda stazionaria si presenta con ampiezza di oscillazione diversa nei diversi punti della linea, presentando, come tutte le onde che interferiscono le così dette *frange di interferenza*.

Quanto è la distanza tra due ventri o due nodi consecutivi ?

Per fissare le idee, supponiamo che in un punto  $x$  ci sia un ventre.

---

<sup>10</sup>ipotesi di urto anelastico

Ma questo vuol dire che l'onda diretta e l'onda riflessa convergono in quel punto, con moti oscillatori *in fase* tra loro. Ad esempio entrambi i moti iniziano nel valore massimo.

Allora, se ci spostiamo da questo punto di una distanza pari alla lunghezza d'onda, i moti continueranno ad essere in fase e quindi alla distanza  $x \pm \lambda$  avremo sicuramente un altro ventre.

Se invece ci spostiamo di  $\frac{\lambda}{2}$ ? Succede che il moto dell'onda diretta si sfasa di  $180^\circ$ , iniziando sul valore minimo. Ma anche il moto dell'onda riflessa si sfasa di  $180^\circ$ , iniziando quindi, sul valore minimo. La conclusione è che i due movimenti sono ancora in fase. Prima iniziavano entrambi sul valore massimo, ora iniziano entrambi sul valore minimo.

Se vogliamo trovare un nodo ci dobbiamo spostare dal punto dove c'è il ventre di una distanza pari a  $\frac{\lambda}{4}$ , dove i due movimenti risultano sfasati di  $\pm 90^\circ$ , cioè di  $180^\circ$  l'uno rispetto all'altro.

Concludiamo che la minima distanza tra due nodi o due ventri è di  $\frac{\lambda}{2}$ , mentre la distanza tra un nodo ed un ventre consecutivi è di  $\frac{\lambda}{4}$ .

### 1.6.5 L'espressione dell'indice di riflessione

Naturalmente la somma dell'onda diretta e dell'onda riflessa dovrà fornire, al ricevitore, quindi per  $x = L$ , proprio il segnale assorbito dallo stesso. Dovrà quindi essere:

$$\frac{V_T(L)}{i_T(L)} = Z_{RX} = \frac{V_{DL} + V_{RL}}{I_{DL} + I_{RL}}$$

Raccogliendo  $V_{DL}$  e  $I_{DL}$ , si ricava:

$$Z_{RX} = \frac{V_{DL} \cdot (1 + \frac{V_{RL}}{V_{DL}})}{I_{DL} \cdot (1 + \frac{I_{RL}}{I_{DL}})}$$

Nei rapporti si riconoscono gli indici di riflessione di tensione e corrente, per cui si ottiene:

$$Z_{RX} = Z_0 \frac{1 + k_v}{1 - k_v}$$

Risolvendo rispetto a  $k$ , si ricava l'espressione dell'indice di riflessione in funzione delle impedenze della linea e del ricevitore:

$$k_v = \frac{Z_{RX} - Z_0}{Z_{RX} + Z_0}$$

Dunque  $k$  è una funzione di  $Z_{RX}$ , in generale una quantità complessa.

Siamo ora in grado di analizzare ciò che avviene al variare di  $Z_{RX}$ .

Abbiamo intanto un primo caso notevole, quando:

- $Z_{RX} = Z_0$

In questo caso *la linea è adattata* e si ha:  $k_v = 0$

Quando il ricevitore ha esattamente la stessa impedenza della linea, l'indice di riflessione è zero, pertanto non vi è onda riflessa. L'onda incidente, giunta al ricevitore, viene interamente assorbita dallo stesso.

Si dice anche che la linea opera in: *regime di onda progressiva* in quanto l'onda si muove effettivamente dal trasmettitore al ricevitore.

In tutti gli altri casi, quando:

- $Z_{RX} \neq Z_0$

*La linea non è adattata* e si ha:  $k_v \neq 0$

Quando l'impedenza del ricevitore è diversa dall'impedenza caratteristica, c'è onda riflessa, che sovrapponendosi all'onda diretta crea l'onda stazionaria.

Si dice che la linea opera in: *regime di onda stazionaria* perché le due onde, come abbiamo già detto, muovendosi con direzioni diametralmente opposte danno una risultante complessiva di staticità, in particolare in quei casi in cui nessuno dei due movimenti risulta prevalere sull'altro.

### 1.6.6 Esempio 1: linea aperta

Questo caso si presenta quando il ricevitore, come in figura 14 non viene collegato alla linea e la linea viene lasciata aperta. L'impedenza che la linea vede verso il ricevitore è allora:

$$Z_{RX} = \infty$$

Deduciamo che, in corrispondenza del ricevitore, la corrente totale è nulla:

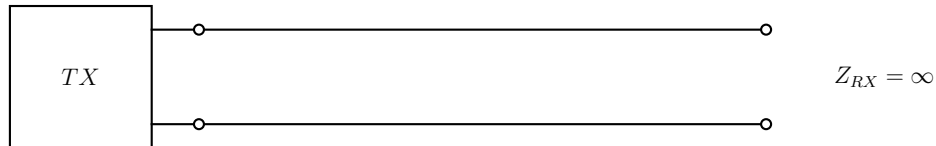


Figura 14: Linea elettrica aperta

$$i_T(L) = I_{DL} + I_{RL} = 0$$

ovvero che:  $I_{RL} = -I_{DL}$ , cioè che:  $k_i = -1$

Ma allora si ha:  $k_v = 1$ , ovvero:  $V_{RL} = V_{DL}$

Deduciamo che, in corrispondenza del ricevitore, la tensione totale è doppia. Possiamo verificare il nostro risultato anche utilizzando la espressione di  $k_v$ :

$$k_v = \frac{Z_{RX} - Z_0}{Z_{RX} + Z_0} = 1$$

Quindi, nel punto  $x = L$ , la *corrente* presenta un *nodo*, mentre la *tensione* presenta un *ventre*.

Allontanandoci dal ricevitore, vedremo, per la tensione, come per la corrente, le frange di interferenza. L'onda stazionaria<sup>11</sup> presenta, quindi, il profilo di ampiezza di figura 15, con un alternarsi di punti, i ventri, in cui l'ampiezza è grande e punti, i nodi, in cui l'ampiezza è piccola, separati tra loro di  $\frac{\lambda}{4}$ .

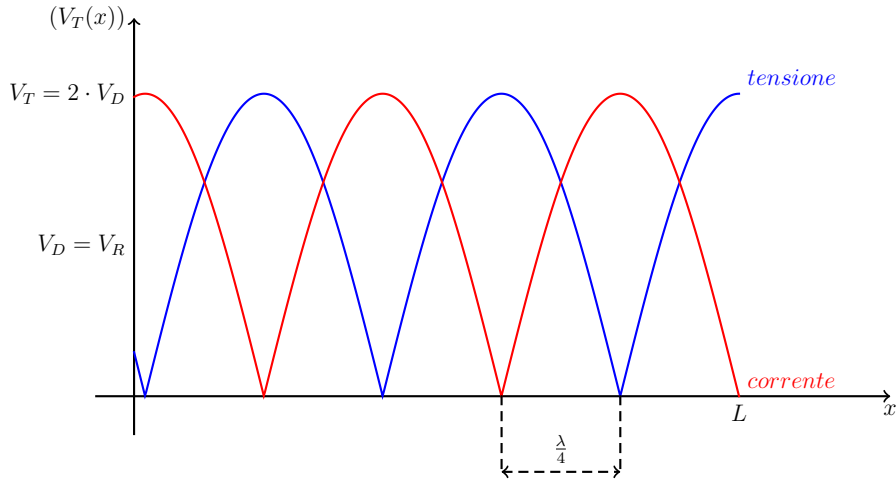


Figura 15: Onda Stazionaria per linea aperta senza perdite

Esaminando l'onda stazionaria in istanti successivi, si vede la tensione modificarsi nel tempo alla frequenza del segnale, ma i nodi ed i ventri presentarsi sempre nella medesima posizione. Il risultato è che l'onda stazionaria non si sposta né verso il  $TX$  né verso l' $RX$ , ma staziona nella medesima posizione. La distanza tra due ventri, o due nodi, consecutivi è sempre la stessa e vale  $\frac{\lambda}{2}$ . Invece la distanza tra un nodo ed un ventre consecutivi è  $\frac{\lambda}{4}$ .

<sup>11</sup>nella figura si è supposto per semplicità che il cavo sia *senza perdite*, in modo che le onde non si attenuino durante la propagazione. Nel caso più generale, man mano che l'onda riflessa risale verso il trasmettitore perde di intensità, mentre trova un'onda diretta sempre più intensa. L'effetto è visibile soprattutto per i nodi: infatti, mentre nei nodi vicini al ricevitore l'onda stazionaria è praticamente nulla, in quelli vicini al trasmettitore non è più nulla. Il grafico effettivo si discosta leggermente dal grafico di figura, mostrando differenze sempre più accentuate verso il trasmettitore.

### 1.6.7 Esempio 2: linea in cortocircuito

Questo caso si presenta quando al ricevitore, come in figura 16, la linea viene cortocircuitata. L'impedenza che la linea vede verso il ricevitore è allora:

$$Z_{RX} = 0$$

Deduciamo che, in corrispondenza del ricevitore, la tensione totale è nulla:

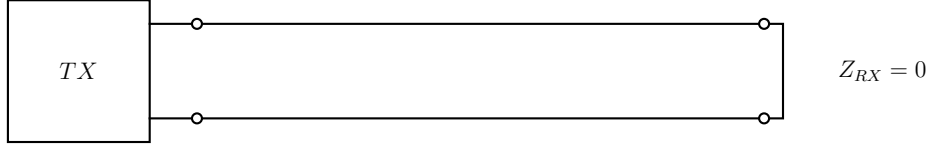


Figura 16: Linea elettrica in cortocircuito

$$V_T(L) = V_{DL} + V_{RL} = 0$$

ovvero che:  $V_{RL} = -V_{DL}$ , cioè che:  $k_v = -1$

Ma allora si ha:  $k_i = 1$ , ovvero:  $I_{RL} = I_{DL}$

Deduciamo che, in corrispondenza del ricevitore, la corrente totale è doppia. Possiamo verificare il nostro risultato anche utilizzando l'espressione di  $k_v$ :

$$k_v = \frac{Z_{RX} - Z_0}{Z_{RX} + Z_0} = -1$$

Quindi, nel punto  $x = L$ , la *tensione* presenta un *nodo*, mentre la *corrente* presenta un *ventre*.

Allontanandoci dal ricevitore, vedremo, per la tensione, come per la corrente, le frange di interferenza. L'onda stazionaria<sup>12</sup> presenta, ora, il profilo di ampiezza di figura 17, analogo a quello dell'esempio precedente, con un alternarsi di punti, i ventri, in cui l'ampiezza è grande e punti, i nodi, in cui l'ampiezza è piccola, separati tra loro di  $\frac{\lambda}{4}$ .

Esaminando l'onda stazionaria in istanti successivi, si vede la tensione modificarsi nel tempo alla frequenza del segnale, ma, come nell'esempio precedente, i nodi ed i ventri presentarsi sempre nella medesima posizione. Il risultato è che l'onda stazionaria non si sposta né verso il  $TX$  né verso l' $RX$ , ma staziona nella medesima posizione. La distanza tra due ventri, o due nodi, consecutivi è sempre la stessa e vale  $\frac{\lambda}{2}$ . Invece la distanza tra un nodo ed un ventre consecutivi è  $\frac{\lambda}{4}$ .

<sup>12</sup>anche in questo esempio, nella figura si è supposto per semplicità che il cavo sia *senza perdite*, in modo che le onde non si attenuino durante la propagazione. Nel caso più generale, man mano che l'onda riflessa risale verso il trasmettitore perde di intensità, mentre trova un'onda diretta sempre più intensa. L'effetto è visibile soprattutto per i nodi: infatti, mentre nei nodi vicini al ricevitore l'onda stazionaria è praticamente nulla, in quelli vicini al trasmettitore non è più nulla. Il grafico effettivo si discosta leggermente dal grafico di figura, mostrando differenze sempre più accentuate verso il trasmettitore.

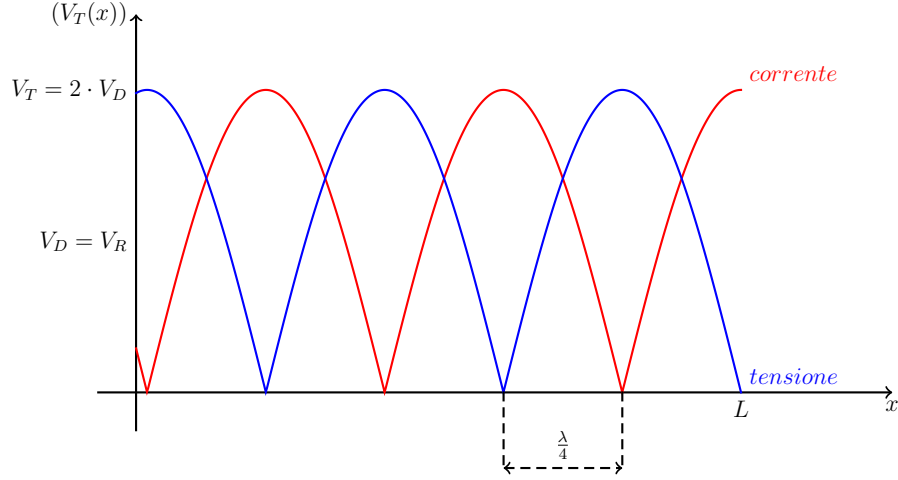


Figura 17: Onda Stazionaria per linea in cortocircuito senza perdite

### 1.6.8 IL R.O.S.

Nel caso più generale, l'impedenza di carico può avere un valore qualsiasi, diverso dall'impedenza caratteristica, perciò l'indice di riflessione ha un imprecisato valore complesso. Anche in questo caso si genera, a causa del disadattamento, un'onda stazionaria, ma la differenza tra le ampiezze dell'onda ai nodi ed ai ventri è più contenuta. In particolare, la distanza tra i nodi, quella tra i ventri e quella tra un nodo ed un ventre non cambia, ma ai nodi l'ampiezza non è più totalmente nulla, mentre ai ventri non è più esattamente doppia del valore dell'onda incidente. L'onda stazionaria è il principale indice della presenza di un disadattamento, presentandosi, infatti, anche quando il disadattamento è tra il  $TX$  e la linea. Il fatto che lungo la linea l'ampiezza dell'onda stazionaria sia fortemente diseguale, permette nella pratica di individuarne la presenza: basta infatti misurare l'ampiezza del potenziale in differenti punti della linea e confrontarli tra loro, individuando i nodi, cioè i punti di minima ampiezza ed i ventri, cioè i punti di massima ampiezza. Lo strumento predisposto per questo scopo si chiama *rosmetro*, ovvero misuratore di *ROS*, un acronimo che sta per: *rapporto onda stazionaria*, così definito:

$$ROS = \frac{V_{ventri}}{V_{nodi}}$$

Il valore del *ROS*, normalmente è espresso in unità logaritmiche.

L'utilizzazione più tipica del rosmetro consiste nella determinazione dell'adattamento ottimale dei dispositivi connessi ad una linea, ad esempio le antenne.



## 1.7 Questionario riepilogativo

1. Definisci le costanti primarie di una linea lunga e chiarisci le differenze tra il modello a costanti concentrate ed il modello a costanti distribuite. Spiega quando una linea è da considerarsi lunga e perché. Mostra l'effetto filtrante.
2. Ricava una delle equazioni di propagazione e mostra la soluzione generale del sistema di equazioni di una linea.
3. Definisci l'impedenza caratteristica e dimostra la sua espressione generale per l'onda diretta.
4. Dimostra l'espressione dell'impedenza caratteristica in un caso particolare.
5. Definisci la costante di propagazione e chiarisci il modo in cui influisce sulla distribuzione dei potenziali lungo la linea.
6. Dimostra le espressioni della costante di propagazione in un caso particolare.
7. Definisci il  $dB_m$  e mostra come si calcola il livello di segnale in un particolare punto della linea, nota l'ampiezza del segnale e l'impedenza caratteristica. Puoi fare un esempio numerico. Come si calcola, invece, l'attenuazione ?
8. Definisci la lunghezza d'onda e dimostra la sua espressione.
9. Dimostra l'espressione della velocità di propagazione in un caso particolare.
10. Definisci l'indice di riflessione e dimostra la sua espressione.
11. Una linea sta operando in regime di onda progressiva. Cosa vuol dire? Quando questo avviene ?
12. Una linea sta operando in regime di onda stazionaria. Cosa vuol dire? Quando questo avviene ?
13. Spiega il fenomeno dell'interferenza costruttiva e dell'interferenza distruttiva, indicando in quali punti avviene e perché.
14. Illustra il profilo dell'onda stazionaria con un esempio, mostrando graficamente la collocazione dei nodi e dei ventri e la loro distanza.

## 1.8 Esercizi di calcolo

1. Una linea, di lunghezza  $L = 5 \text{ km}$ , è caratterizzata dalle seguenti costanti primarie:  $r = 0,2 \frac{\Omega}{\text{m}}$ ;  $l = 4 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ;  $c = 5,5 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ . Il segnale immesso ha ampiezza di  $8 \text{ V}$  e frequenza di  $1 \text{ kHz}$ . Si chiede: il modello della linea ed il calcolo delle costanti nella ipotesi che sia soddisfatta la condizione di Heaviside; il calcolo delle costanti secondarie; l'espressione dell'onda diretta, con il calcolo e la rappresentazione ad inizio, a metà ed alla fine della linea; la condizione perchè la linea sia adattata. La linea va considerata lunga? Quanto tempo impiega il segnale per attraversare la linea?
2. Una linea lunga  $800 \text{ m}$  ha:  $r = 21 \frac{\Omega}{\text{km}}$ ;  $l = 3,5 \frac{\text{mH}}{\text{km}}$ ;  $c = 12 \frac{\text{nF}}{\text{km}}$ ;  $g = 72 \frac{\mu\text{S}}{\text{km}}$ . Il segnale ha ampiezza di  $15 \text{ V}$  e frequenza di  $50 \text{ kHz}$ . Determinare il modello e verificare se soddisfa la condizione di Heaviside. Si chiede poi: il calcolo delle costanti secondarie, della lunghezza d'onda, della velocità di trasmissione e del tempo che impiega il segnale per attraversare la linea. Calcolare anche il livello, in  $\text{dB}_m$ , del segnale in entrata ed in uscita e l'attenuazione.
3. Un cavo elettrico bifilare lungo  $1,2 \text{ km}$ , funzionante in regime di onda progressiva, alla frequenza di  $400 \text{ kHz}$ , presenta impedenza caratteristica di  $100 \Omega$  e costante di propagazione pari a:  $\gamma = (0,087 + j12,5) \text{ km}^{-1}$ . Sapendo che il livello del segnale immesso è di  $18 \text{ dB}_m$ , si chiede: il calcolo della tensione immessa in linea; l'espressione dell'onda diretta; il calcolo della tensione in uscita, del livello del segnale in uscita, dell'attenuazione della linea ( $1 \frac{\text{Np}}{\text{km}} \approx 8,686 \frac{\text{dB}}{\text{km}}$ ); il calcolo delle ampiezze della tensione e della corrente trasferite al ricevitore; si chiede inoltre il calcolo del tempo di propagazione.
4. In una linea senza perdite avente:  $l = 4,2 \frac{\text{mH}}{\text{km}}$ ;  $c = 15 \frac{\text{nF}}{\text{km}}$ , chiusa su un carico di  $600 \Omega$ , si immette un segnale di  $4 \text{ Volt}$  e  $180 \text{ kHz}$ . Determinare: il regime presentato dalla linea; la corrente immessa e la corrispondente potenza in  $\text{dB}_m$ ; l'indice di riflessione; le ampiezze dell'onda riflessa di tensione e di corrente; le ampiezze dei segnali di tensione e di corrente che giungono al ricevitore. Determinare inoltre la tensione totale nei punti in cui c'è interferenza costruttiva e distruttiva ed il  $ROS$ .
5. Una linea è lunga 4 volte la lunghezza d'onda, ed è aperta dal lato del ricevitore. Essa soddisfa la condizione di Heaviside ed è caratterizzata dalle seguenti costanti primarie:  $r = 18 \frac{\Omega}{\text{km}}$ ;  $l = 2,5 \frac{\text{mH}}{\text{km}}$ ;  $g = 64 \frac{\text{S}}{\text{km}}$ . Il segnale immesso ha ampiezza di  $5 \text{ V}$  e frequenza di  $100 \text{ kHz}$ . Si chiede: il modello, le costanti secondarie; la lunghezza della linea; il tipo di regime; i valori delle onde diretta, riflessa e stazionaria al ricevitore. si chiede poi: Quanti nodi contiene l'onda stazionaria lungo la linea? E quanti ventri? Rappresentare l'onda stazionaria.