

Esercizi Matematica 3

Dipartimento di Matematica



ITIS V.Volterra
San Donà di Piave

Versione [12/13]



Introduzione

Gli esercizi presentati in questo volume, seguono la stessa struttura — capitolo, sezione, sottosezione — del corrispondente testo di teoria.

Gli esercizi *non* sono distribuiti in ordine rigoroso di difficoltà; si possono trovare prima esercizi più difficili e dopo esercizi più facili; in ogni caso la difficoltà è *compatibile* con lo sviluppo della teoria nel testo corrispondente. Valgono due sole *eccezioni*: ci sono esercizi contrassegnati con un asterisco (*) o con due asterischi (**): i primi sono da considerare esercizi *difficili* e i secondi *molto difficili*; in ogni caso, come tutti ben sanno, la difficoltà è una *pura opinione*.

Indice

I Numeri e Funzioni	1
1 Numeri	2
1.1 Tipi di numeri	2
1.2 Proprietà fondamentali	2
1.3 Uguaglianze e disuguaglianze	2
2 Appendici	5
2.1 Naturali e interi	6
3 Funzioni	7
3.1 Definizioni	7
3.2 Grafici	7
3.3 Tipi di funzioni	8
3.4 Operazioni	8
3.5 Proprietà notevoli	9
II Funzioni trascendenti	10
4 Funzioni trascendenti	11
4.1 Funzioni esponenziali e logaritmiche	11
4.2 Funzioni goniometriche	15
4.3 Esercizi riassuntivi sulle funzioni trascendenti	18
III Geometria analitica	19
5 Esercizi di geometria analitica sulle rette	20
IV Contributi	24

Parte I

Numeri e Funzioni

Capitolo 1

Numeri

1.1 Tipi di numeri

1.2 Proprietà fondamentali

1.3 Uguaglianze e disuguaglianze

Esercizio 1.3.1. Risolvere le disequazioni.

- | | | |
|----|---|---|
| 1. | $\left \frac{1-2x}{3+2x} \right \geq 3$ | $\left[-\frac{5}{2} \leq x \leq -1, x \neq -\frac{3}{2} \right]$ |
| 2. | $ 2x+1 > 3x-2 $ | $\left[\frac{1}{5} < x < 3 \right]$ |
| 3. | $ x - 2x-3 < 4$ | $\left[-\frac{1}{3} < x < 7 \right]$ |
| 3. | $ x - 2x-3 < 4$ | $\left[-\frac{1}{3} < x < 7 \right]$ |
| 4. | $\frac{x^2-2x-3}{9-x^2} \geq 0$ | [?] |
| 5. | $\frac{9x^2+6x+1}{x^4+16} \leq 0$ | [?] |
| 6. | $\frac{x^5+3}{1-x^8} \leq 0$ | [?] |
| 7. | $\frac{-x^2-10}{9x^2+6x+3} < 0$ | [?] |
| 8. | $x^4-2x^2-15 \leq 0$ | [?] |

Esercizio 1.3.2. Risolvere le disequazioni.

1.
$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 - 9x - 18 \geq 0 \\ x^4 - 10x^2 + 9 \leq 0 \end{cases} \quad (-3 \leq x \leq -2 \quad ; \quad x = 3)$$
2.
$$\begin{cases} \frac{x-2}{x-1} \leq \frac{x^2}{x^2-3x+2} - \frac{x-1}{2-\frac{2}{3}x} \\ \frac{x-3}{x^2-x} - \frac{x+3}{x^2+x} \geq \frac{2}{x^2-1} \end{cases} \quad (x > 2)$$
3.
$$\frac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - 7x + 6} \leq 0 \quad (1 \leq x < \frac{3}{2} \quad ; \quad 2 < x \leq 5)$$
4.
$$\frac{(x^2 + 3)(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 4x + 4} \leq 0 \quad (1 \leq x \leq 3 \text{ ma } x \neq 2)$$
5.
$$x^3 - x^2 - 5x - 3 < 0 \quad (x < 3 \text{ ma } x \neq -1)$$
6.
$$\frac{(x^4 - 1)(x^5 + 32)}{(x^6 + 1)(x^3 - 27)} \geq 0 \quad (x \leq -2 \quad ; \quad -1 \leq x \leq 1 \quad ; \quad x > 3)$$
7.
$$3 \leq x^2 - 1 < 8 \quad (2 \leq |x| < 3)$$
8.
$$\frac{2x^4 + 3}{x^6 - 64} \leq 0 \quad (-2 < x < 2)$$
9.
$$|x^2 - x| < 1 \quad (\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2})$$
10.
$$\frac{|2x + 1| - 1}{5 - |x - 2|} \geq 0 \quad (-3 < x \leq -1 \quad , \quad 0 \leq x < 7)$$
11.
$$\sqrt{x^2 - 4x} > 1 - x \quad (x \geq 4 \quad , \quad x < -\frac{1}{2})$$
12.
$$\frac{1 - |4x - 3|}{|2x - 3| - 3} \geq 0 \quad (?)$$

Esercizio 1.3.3. Risolvere le disequazioni.

1.
$$\sqrt[3]{8x^3 + 1} > 2x + 1 \quad (?)$$
2.
$$\sqrt{x - 1} < 3 \quad (?)$$
3.
$$\sqrt{2x^2 - x} > x \quad (?)$$
4.
$$\sqrt{2x^2 - x} \geq x \quad (?)$$
5.
$$\frac{\sqrt{2x^2 - x} - x}{x^2 - 4x + 3} \leq 0 \quad (\frac{1}{2} \leq x < 3 \quad x \neq 1)$$

Esercizio 1.3.4. Risolvere le disequazioni.

- 1*. $\frac{\sqrt{x^2 - 4x - 1} + x}{|x| - 2} \leq 0$ ($-2 < x \leq -\frac{1}{2}$)
2. $\frac{|x - 1| - |x|}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} \leq 0$ ($-1 < x \leq \frac{1}{2}$; $x > 1$)
3. $\frac{|x - 1| - |x|}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} \leq 0$ ($-1 < x \leq \frac{1}{2}$; $x > 1$)
4. $x > \sqrt[3]{3x^2 - 2x}$ ($0 < x < 1$; $x > 2$)
5. $\sqrt{||x + 3| - 2| - 1} > 0$ ($x < -6$; $-4 < x < -2$; $x > 0$)
6. $\begin{cases} \sqrt{2x^2 + x - 3} - x + 1 > 0 \\ \left| \frac{2x + 1}{x - 3} \right| < 2 \end{cases}$ ($x \leq -\frac{3}{2}$; $1 < x < \frac{5}{4}$)
7. $\frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{\sqrt{x^4 + 3} + 4} > 0$ ($\frac{1 + \sqrt{13}}{6} < x \leq 1$; $x \geq 2$)
8. $\frac{|x - 1| - |x - 2|}{|x^2 - 9|} \geq 0$ ($x \geq \frac{3}{2}$ ma $x \neq 3$)
9. $\frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x^2 + 3x}}{|x|} \geq 0$ ($0 < x \leq -1 + \sqrt{2}$)
10. $\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} < 2$ ($x \leq -1$; $x > \frac{5}{3}$)
11. $\sqrt{25 - x^2} + x - 7 \geq 0$ ($3 \leq x \leq 4$)
12. $13 - x - \sqrt{x + 7} < 0$ ($x > 9$)
13. $\frac{2x - \sqrt{x^2 - 3x}}{x^2 - 16} \geq 0$ ($-4 < x \leq 0$; $x > 4$)
14. $x^2 - 4|x| + 3 < 0$ ($1 < |x| < 3$)
15. $\frac{|x|^3 - 27}{|x|^2 - 1} < 0$ ($1 < |x| < 3$)

Capitolo 2

Appendici

2.1 Naturali e interi

Esercizio 2.1.1. Per ogni intero $n \geq 1$ dimostrare che

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Esercizio 2.1.2. Per ogni intero $n \geq 1$ dimostrare che

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Esercizio 2.1.3. Per ogni intero $n \geq 1$ dimostrare che

$$1^2 + 2^2 + 3^2 \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Esercizio 2.1.4. Per ogni intero $n \geq 1$ dimostrare che

$$1^3 + 2^3 + 3^3 \dots + n^3 = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

Capitolo 3

Funzioni

3.1 Definizioni

Esercizio 3.1.1. Sia

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

definita per $x \neq 0$; calcolare $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(123)$. Cosa si deduce?

3.2 Grafici

Esercizio 3.2.1. Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni.

1. $f_1(x) = \frac{x}{2} + 3$

2. $f_2(x) = 2x^2 - 1$

3. $f_3(x) = -3x^2 + 1$

4. $f_4(x) = x^3$

5. $f_5(x) = \sqrt{x}$

6. $f_6(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

7. $f_7(x) = |x| + x$

8. $f_8(x) = -|x| + x$

9. $f_9(x) = \frac{1}{x+2}$

10. $f_{10}(x) = \frac{1}{x-2}$

11. $f_{11}(x) = \frac{3}{x}$

12. $f_{12}(x) = \frac{x}{|x|}$

13. $f_{13}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

14. $f_{14}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

15. $f_{15}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

16. $f_{16}(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 2 \\ x^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

Esercizio 3.2.2. Disegnare un grafico approssimato delle funzioni dell'esercizio precedente, calcolandone anche alcune immagini per valori arbitrari del campo di esistenza.

Esercizio 3.2.3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -x^2 - 4x$ la si rappresenti graficamente e si dica se è biiettiva; in caso contrario, renderla tale per $x \geq -2$ ed indicare con f_1 la restrizione di f così trovata. Determinare l'inversa di f_1 e rappresentarla graficamente. Infine, risolvere la disequazione $-2 + \sqrt{4-x} \leq x$.

$$(f_1^{-1} : \{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\} \rightarrow \{y \in \mathbb{R} : y \geq -2\}, x \mapsto -2 + \sqrt{4-x}; S : 0 \leq x \leq 4)$$

Esercizio 3.2.4. Con riferimento all'esercizio precedente, rappresentare graficamente la funzione $y = g(x) = -f(-x)$ e risolvere la disequazione $g(|x|) > -3$ anche per via grafica.

$$(x < -3 \quad ; \quad -1 < x < 1 \quad ; \quad x > 3)$$

Esercizio 3.2.5. Rappresentare graficamente la curva di equazione $y = f(x) = (x-2)^3 + 1$ partendo dalla curva base $y = x^3$; determinare, quindi, la funzione inversa f^{-1} e verificare che $f \circ f^{-1}$ è la funzione identica.

$$(f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1})$$

3.3 Tipi di funzioni

3.4 Operazioni

3.5 Proprietà notevoli

Esercizio 3.5.1. Stabilire quali delle funzioni seguenti sono pari, dispari o nessuna delle due. E' opportuno considerare prima il campo di esistenza.

1. $f_1(x) = x$

2. $f_2(x) = 2x^2$

3. $f_3(x) = x^2 - 1$

4. $f_4(x) = x^3$

5. $f_5(x) = \sqrt{x}$

6. $f_6(x) = \frac{1}{x}$

7. $f_7(x) = |x|$

8. $f_8(x) = |x| + x$

Esercizio 3.5.2 (*). Dimostrare che una funzione definita per tutti i numeri può essere scritta come somma di una funzione pari e una funzione dispari. Suggestivo: considerare la funzione

$$g_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

Esercizio 3.5.3. Dimostrare che la somma di funzioni dispari è dispari e che la somma di funzioni pari è pari.

Esercizio 3.5.4. Stabilire nei casi elencati quale sia il tipo della funzione prodotto dimostrando il risultato:

- prodotto di funzioni pari
- prodotto di funzioni dispari
- prodotto di una funzione pari per una funzione dispari

Parte II

Funzioni trascendenti

Capitolo 4

Funzioni trascendenti

4.1 Funzioni esponenziali e logaritmiche

Esercizio 4.1.1. Tracciare un grafico approssimato delle funzioni.

1. $y = 2^{|x|+1}$

2. $y = 2^{|x|} + 1$

3. $y = 2^{|x+1|}$

Esercizio 4.1.2. Risolvere le equazioni esponenziali.

1. $2^{(2x-1)(3x-2)} 2^{5-8x} 4^{x(3x-1)} = 16^{2x} (8^{7+x})^{7-x}$

2. $\frac{2}{3} 5^{x-1} + 5 \cdot 5^x - 5^{x+2} + \frac{298}{3} = 0$

3. $\sqrt{8^x} + 4 \cdot 2^{-\frac{x}{2}} = 5 \cdot 2^{\frac{x}{2}}$

4. $9^{x+2} + 9^{x-2} = 82$

5. $2 \cdot 3^{x-\sqrt{x^2-1}} - 9^{x+1-\sqrt{x^2-1}} + 75 = 0$

6. $2^{|x|} - 8 \cdot 4^{|x|-1} + 1 = 0$

Esercizio 4.1.3. Risolvere le equazioni logaritmiche.

1. $3^{\log_3 x} = 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

2. $\log_2(1+x) - \log_2(1-x) = -1$

3. $\log_{\frac{2}{3}} 3x + \log_{\frac{1}{2}} 3x - 2 = 0$

4. $\log_3(x-1) - \log_9 x^2 + \log_{\sqrt{3}} \frac{x}{2} = 0$

Esercizio 4.1.4. Risolvere le disequazioni logaritmiche-esponenziali.

1. $\log_6(x-1) + \log_6(x-2) < 1$ $(2 < x < 4)$
2. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2) + \log_2(x-2) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ $(x > 2)$
3. $(\log_{\frac{1}{2}}x)^2 + \log_{\frac{1}{2}}x - 2 \geq 0$ $(?)$
4. $|\ln(3^x - 2)| < 1$ $(?)$

Esercizio 4.1.5. Risolvere le disequazioni logaritmiche-esponenziali.

1. $3^x \geq 81$ $(x \geq 4)$
2. $\left(\frac{2}{5}\right)^x < 0$ (\emptyset)
3. $(0,1)^x \leq 100$ $(x \geq -2)$
4. $32^x \leq 16$ $(x \leq \frac{4}{5})$
5. $3^{\sqrt{x+1}} < 9$ $(-1 \leq x < 3)$
6. $\begin{cases} 1 - 6^{1+x} \geq 0 \\ 3^x + 5 > 0 \end{cases}$ $(x \leq -1)$
7. $\frac{2^x - 1}{2^x - 8} \leq 0$ $(0 \leq x < 3)$
8. $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 < 0$ $(0 < x < 2)$
9. $4^x > 7$ $(x > \log_4 7)$
10. $3^{x+1} + 3^{x-1} = 4^x + 2^{2x-1}$ $(x = \log_{\frac{3}{4}} \frac{9}{20})$
11. $\frac{5}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{5}{2}\right)^{x+2} > 0$ $(x < 0)$
12. $3^{x^2} - 81 < 0$ $(-2 < x < 2)$
13. $125^x \geq \frac{25^x}{5}$ $(x \geq -1)$
14. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{9-x^2}} < 32$ $(-3 \leq x \leq 3)$
15. $2 - \frac{1}{5^{1-2x}} = \frac{1}{25^{1-2x}}$ $(x = \frac{1}{2})$

16. $\frac{e^{2x} - 1}{e^x} \geq 0$ ($x \geq 0$)
17. $2^{x+2} - 2^{x+1} - 2^x - 2^{x-1} - 2^{x-2} = 1$ ($x = 2$)
18. $\frac{3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3}{|x| - 1} \geq 0$ ($x < -1$; $x \geq 0$ ma $x \neq 1$)
19. $\frac{3^x - 2}{\left(\frac{1}{5}\right)^x - 3} \geq 0$ ($\log_{\frac{1}{5}} 3 < x \leq \log_3 2$)
20. $\log_2 x \geq x - 1$ risolvi graficamente...
21. $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{17}{4}$ ($x = \sqrt[4]{2}$; 2^4)
22. $\log_2 \log_{\frac{1}{2}}(x - 3) = 1$ ($x = \frac{13}{4}$)
23. $\log_3 x \cdot \log_x 9 = \sqrt{x+3}$ (\emptyset)
24. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 3) - \log_{\frac{1}{2}}(x - 2) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$ ($x > 3$)
25. $\log \log(x^2 - 15) < 0$ ($4 < |x| < 5$)
26. $\log_x(2x - 1) > 1$ ($x > \frac{1}{2}$ ma $x \neq 1$)

Esercizio 4.1.6. Risolvere le disequazioni logaritmiche-esponenziali.

1. $\log_{x^2}(x^2 + 1) \geq 0$ ($x < -1$; $x > 1$)
2. $\log_2 x^2(2^{x^2} + \sqrt{|x|}) \leq 1$ (\emptyset)
3. $\frac{\frac{x}{3} + 1 - \sqrt{x+1}}{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4}$ ($-1 \leq x < 2$ ma $x \neq 0$; $x \geq 3$)
4. $(e^x - 1)(e^{2x} - 5e^x + 3) \leq 0$ ($x < \ln \frac{3}{2}$)
5. $\log_2 \frac{x+1}{x-1} - \log \frac{1}{2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} < 0$ ($-3 < x < 1$ e $x > 2$)
6. $\frac{e^x - e^{-x}}{2} > 1$ ($x > \ln(1 + \sqrt{2})$)
7. $\frac{\ln x + \ln 2}{\ln(15 - 4x)} \leq 2$ ($0 < x < \frac{25}{8} \vee \frac{7}{2} < x < \frac{15}{4}$)
8. $\log_2(x^2 - 3x + 3) > 0$ ($x < 1 \vee x > 2$)

9. $\log_2 \frac{x+1}{x-1} - \log_{\frac{1}{2}} \frac{(x+4)^2}{x^2-1} < 0$ (?)
10. $|5^{3x} - 9| < 4$ ($\frac{1}{3} < x < \frac{\log_5 13}{3}$)
11. $\frac{|\ln x|}{(\ln x - 1)^2} \leq \frac{1}{2}$ (?)
12. $25^x - 2^{\log_2 6^{-1}} < 5^{x-1}$ (?)
13. $\frac{\sqrt{|1-e^x|-1}}{e^x-4} \geq 1$ (?)
14. $20 \ln^2 x + 31 \ln x - 9 > 0$ (?)
15. $\log_{x^2}(2+x) < 1$ (?)
16. $(\log_x 2)(\log_{2x} 2)(\log_2 4x) > 1$ (?)
17. $\log_3 \frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geq 0$ (?)

4.2 Funzioni goniometriche

Esercizio 4.2.1. Calcolare il valore delle espressioni.

$$1. \quad [\cos(\frac{3}{2}\pi - \alpha) \sin(2\pi - \alpha) - \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) \cos(\pi + \alpha)]^2 \tan \alpha \cot(\pi + \alpha) \quad (?)$$

$$2. \quad \frac{\sin \frac{\pi}{6} + 1 - \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{3}} - \frac{\cos \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}-2}{2}}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} \quad (?)$$

$$3. \quad \frac{\frac{1}{4} (3 \sin \frac{5}{2}\pi + 2 \cos \frac{\pi}{2})}{\sin \pi - \frac{1}{2} \cos \pi} : \frac{2 \sin \frac{\pi}{2} + \cos 2\pi}{2(\sin 2\pi + \cos 2\pi)} \quad (1)$$

$$4. \quad \frac{a (a \sin \frac{5}{2}\pi + b \cos \frac{5}{2}\pi) - b (a \cos \frac{5}{2}\pi + b \sin \frac{5}{2}\pi)}{a(\sin 2\pi + \cos 2\pi) + b(\sin 3\pi + \cos 3\pi)} \quad (a + b)$$

Esercizio 4.2.2. Tracciare un grafico approssimato delle funzioni.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $y = \sin 2x + 3$ | 2. $y = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$ | 3. $y = \tan x - 1$ |
| 4. $y = \sin x - 1$ | 5. $y = \cos x + 1$ | 6. $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ |
| 7. $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + 1$ | 8. $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$ | 9. $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$ |

Esercizio 4.2.3. Calcolare il valore delle espressioni utilizzando le formule degli angoli associati.

$$1. \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$2. \quad \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \cos \alpha \cot \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \quad (\cos \alpha)$$

$$3. \quad \cos \alpha - \frac{\cos^2(\pi - \alpha) - \sin^2(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha) - \cos(\pi - \alpha)} \quad (\sin \alpha)$$

$$4. \quad \frac{1 + \cos(\pi + \alpha)}{1 + \cos(\pi - \alpha)} - \frac{1 + 2 \cos(\pi + \alpha)}{\sin^2(\pi + \alpha)} \quad (\cot^2 \alpha)$$

Esercizio 4.2.4. Verificare le seguenti identità.

1. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

2. $\frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = 1 + \sin \alpha \cos \alpha$

3. $\sin \alpha \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} = \sec \alpha$

4. $\cos^2 \alpha (\tan \alpha + \cot \alpha) = \cot \alpha$

5. $\frac{\frac{\sin \alpha + 1}{\cot \alpha}}{\frac{\cot \alpha}{1 - \sin \alpha}} = \frac{\cot \alpha}{\sin \alpha}$

6. $\frac{\tan^2 \alpha - 1}{\tan \alpha} = (\sin \alpha - \cos \alpha) \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \right)$

7. $\sin^2 4\alpha - \sin^2 2\alpha = \sin 6\alpha \sin 2\alpha$

8. $\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \alpha \cos \beta$

9. $\tan 4\alpha = \frac{4 \tan \alpha (1 - \tan^2 \alpha)}{\tan^4 \alpha - 6 \tan^2 \alpha + 1}$

10. $\frac{1 - \cot \alpha \tan(\alpha - \beta)}{\cot \alpha + \tan(\alpha - \beta)} = \tan \beta$

Esercizio 4.2.5. Risolvere le equazioni.

1. $\sin 2x - \cos x = 2 \sin x - 1$

2. $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x - (\sqrt{3} + 3) \cos^2 x = 0$

3. $3 \sin x - \sqrt{3} \cos x + 3 = 0$

4. $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$

5. $3 + 3 \cos 2x - \sin^2 \frac{x}{2} = 0$

6. $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) - \sin^2 2x = 0$

7. $|\sin \frac{x}{2}| = 1 - \cos x$

8. $\sin^2 3x + 2 \cos^2 3x + \cos x = -6$

Esercizio 4.2.6. Risolvere le disequazioni.

1. $\frac{4 \sin^2 x + 2(1 - \sqrt{3}) \sin x - \sqrt{3}}{|\sin x|} < 0$

(?)

2. $\frac{\tan^4 x - 9}{|\cos x| - \frac{\sqrt{2}}{2}} < 0$

 $(-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + k\pi$
 ma $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$)

3. $\frac{\sin x + \cos x - 1}{|\tan x - 1|} \geq 0$

 $(2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ma $x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$

4. $\frac{\arcsin(x^2 - 1)}{\sqrt{18x^2 - 9x + 1}} < 0$

 $(-1 < x < \frac{1}{6} ; \frac{1}{3} < x < 1)$

4.3 Esercizi riassuntivi sulle funzioni trascendenti

Esercizio 4.3.1. Determinare il C.E. delle seguenti funzioni reali di variabile reale

1. $f(x) = \log_{|x-1|-2}(2x^2 - x - 3)$ ($x < -1$ ma $x \neq -2$; $x > 3$ ma $x \neq 4$)
2. $f(x) = \log_2 \log_{\frac{1}{4}} x$ ($0 < x < 1$)
3. $f(x) = \log \frac{x^2 - 4|x| + 3}{\sqrt{x}}$ ($0 < x < 1$; $x > 3$)
5. $f(x) = \sqrt{\frac{x^5 + 32}{x^4 + 3x^2}}$ ($x \geq -2$ ma $x \neq 0$)
6. $f(x) = \sqrt{x^4 - 5x^2 + 4}$ ($x \leq -2$; $-1 \leq x \leq 1$; $x \leq 2$)
7. $f(x) = \sqrt{(1 - 2 \log_2 x) \log_{\frac{1}{2}} 5}$ ($x \geq \sqrt{2}$)
8. $f(x) = \frac{\sqrt{2^x + \frac{4}{2^x} - 4}}{|5^x - 1| \log |x + 1|}$ ($x \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2\}$)
9. $f(x) = \sqrt{\log_2(x + 1) - 3}$ ($x \geq 7$)
10. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{1 + \cos x}}$ ($x > 0$ ma $x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}^+$)
11. $f(x) = \frac{\ln(1 - \sin^2 x)}{|xe^{\sin x}|}$ ($x \in \mathbb{R}^* - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$)
12. $f(x) = \frac{\ln(|\sin x + \cos x|)}{3^{2 \sin x} - 4 \cdot 3^{\sin x} + 3}$ ($x \in \mathbb{R}$ ma $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$)
13. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2 + 9} \sqrt{x^2 - 6x + 12}}}{\sqrt{\left| \frac{2x + 1}{3 - x} \right|}}$ ($x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}, 3\}$)

Parte III

Geometria analitica

Capitolo 5

Esercizi di geometria analitica sulle rette

Esercizio 5.0.2. Rispondere alle seguenti domande, giustificando la risposta:

1. E' vero o falso che 2 rette parallele hanno il coefficiente angolare uguale?
2. E' vero o falso che 2 rette perpendicolari hanno il coefficiente angolare antireciproco?
3. Qual è il coefficiente angolare delle rette parallele all'asse delle ascisse?
4. Qual è il coefficiente angolare delle rette parallele all'asse delle ordinate?
5. Qual è il coefficiente angolare delle rette parallele alla I bisettrice?
6. Qual è il coefficiente angolare delle rette parallele alla II bisettrice?
7. Due rette perpendicolari possono avere coefficiente angolare opposto?

[Attenzione: non tutte le rette hanno coefficiente angolare!]

Esercizio 5.0.3. Calcolare la distanza fra i punti $A\left(\frac{4}{5}, -6\right)$ e $B\left(\frac{4}{5}, 2\right)$.

$$[\overline{AB} = 8]$$

Esercizio 5.0.4. Scrivere le coordinate del punto medio del segmento di estremi $A\left(\frac{3}{4}, -2\right)$ e $B\left(-\frac{7}{4}, 6\right)$.

$$\left[M\left(-\frac{1}{2}, 2\right)\right]$$

Esercizio 5.0.5. Scrivere le coordinate del baricentro del triangolo di vertici $A(4, 0)$, $B\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ e $C\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

$$[G(1, 1)]$$

Esercizio 5.0.6. Scrivere l'equazione del fascio improprio di rette parallele alla prima bisettrice.

$$[y = x + k]$$

Esercizio 5.0.7. Dato il punto $P\left(\frac{1}{2}, -3\right)$:

- scrivere l'equazione del fascio proprio \mathcal{F}_P di centro $P\left(\frac{1}{2}, -3\right)$;
- scrivere l'equazione della retta del fascio proprio \mathcal{F}_P passante per $Q\left(\frac{3}{2}, -2\right)$;
- scrivere l'equazione della retta del fascio proprio \mathcal{F}_P parallela alla II bisettrice;
- scrivere l'equazione della retta del fascio proprio \mathcal{F}_P perpendicolare alla retta di equazione $y = -2x$.

$$\left[y + 3 = m \left(x - \frac{1}{2} \right), y = x - \frac{7}{2}, y = -x - \frac{5}{2}, y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{4} \right]$$

Esercizio 5.0.8. Determinare le rette passanti per il punto $A(2, -3)$ e, rispettivamente:

- parallela all'asse x ;
- parallela all'asse y ;
- passante per O ;
- passante per $B(4, 0)$;
- parallela alla retta di equazione $2y + x = 0$.

$$\left[\dots, y = \frac{3}{2}x - 6, y = -\frac{1}{2}x - 2 \right]$$

Esercizio 5.0.9. Dati i punti $A(-2, -2)$, $B(4, 2)$, $C(2, 5)$ e $D(-4, 1)$:

- determinare i punti medi M , N , P e Q rispettivamente di AB , BC , CD e DA ;
- verificare che $ABCD$ è un rettangolo;
- verificare che $MNPQ$ è un rombo equivalente a metà del rettangolo;
- calcolare perimetro e area di $ABCD$ e $MNPQ$.

$$[2p(ABCD) = 6\sqrt{13}, \mathcal{A}(ABCD) = 26]$$

$$[2p(MNPQ) = 2\sqrt{65}, \mathcal{A}(MNPQ) = 13]$$

Esercizio 5.0.10. Date le rette $r_1 : y = \frac{1}{2}x - 1$ ed $r_2 : y = -2x - 11$:

- determinare il loro punto E di intersezione;
- determinare i punti A e C sulla retta r_1 di ascissa rispettivamente -2 e -6 ;
- determinare i punti B e D sulla retta r_2 di ascissa rispettivamente -2 e -6 ;
- verificare che $ABCD$ è un rombo;
- calcolare perimetro e area di $ABCD$.

$$[2p = 20, \mathcal{A} = 20]$$

Esercizio 5.0.11. Date le rette $r_1 : y = \frac{3}{4}x - \frac{37}{4}$, $r_2 : y = -\frac{4}{3}x + \frac{16}{3}$, $r_3 : y = \frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$ ed $r_4 : y = -\frac{4}{3}x - 3$:

- determinare il punto di intersezione B fra r_1 ed r_2 ;
- determinare il punto di intersezione C fra r_2 ed r_3 ;
- determinare il punto di intersezione D fra r_3 ed r_4 ;
- determinare il punto di intersezione A fra r_4 ed r_1 ;
- verificare che $ABCD$ è un rettangolo;
- calcolare perimetro e area di $ABCD$.

$$[2p = 30, \mathcal{A} = 50]$$

Esercizio 5.0.12. Dato il punto $A(2, 3)$:

- scrivere l'equazione del fascio proprio \mathcal{F} di centro A ;
- determinare l'equazione della retta r_1 di \mathcal{F} parallela alla prima bisettrice;
- determinare l'equazione della retta r_2 di \mathcal{F} parallela alla seconda bisettrice;
- determinare i punti C e B rispettivamente sulle rette r_1 ed r_2 di ascissa 7;
- verificare che ABC è un triangolo isoscele;
- calcolare perimetro e area di ABC .

$$[2p = 10 + 10\sqrt{2}, \mathcal{A} = 25]$$

Esercizio 5.0.13. Dato il fascio improprio \mathcal{F} di rette parallele con coefficiente angolare 2:

- scrivere l'equazione della retta r_1 di \mathcal{F} passante per $A(1, 5)$;
- scrivere l'equazione della retta r_2 di \mathcal{F} passante per $B(6, 5)$;
- determinare il punto D sulla r_1 di ascissa -1 ;
- determinare il punto C sulla r_2 di ascissa 2;
- verificare che $ABCD$ è un trapezio isoscele;
- calcolare perimetro e area di $ABCD$.

$$[2p = 10 + 6\sqrt{5}, \mathcal{A} = 30]$$

Esercizio 5.0.14. Date la retta $r_1 : x - 2y + 5 = 0$:

- determinare i punti B e C sulla r_1 di ascissa rispettivamente 1 e -3 ;
- scrivere l'equazione del fascio proprio \mathcal{F}_B di centro B ;
- determinare l'equazione della retta r_2 di \mathcal{F}_B perpendicolare alla r_1 ;
- scrivere l'equazione del fascio proprio \mathcal{F}_O di centro O ;
- determinare l'equazione della retta r_3 di \mathcal{F}_O parallela alla r_1 ;
- determinare $A = r_2 \cap r_3$;

- verificare che $OABC$ è un trapezio rettangolo;
- calcolare perimetro e area di $OABC$.

$$\left[2p = 4\sqrt{5} + \sqrt{10}, \mathcal{A} = \frac{15}{2} \right]$$

Parte IV

Contributi

Contributi e licenza

Erica Boatto	Algebra I - Algebra II - Insiemi
Beniamino Bortelli	Grafici
Roberto Carrer	Coordinatore progetto - Numeri - Funzioni - Integrazione - Matematica 5 Statistica descrittiva
Morena De Poli	Laboratorio matematica
Piero Fantuzzi	Algebra I - Algebra II - Insiemi
Caterina Fregonese	Analisi (Integrazione) - Esercizi
Carmen Granzotto	Funzioni - Analisi (Integrazione)
Franca Gressini	Funzioni - Statistica descrittiva - Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II
Beatrice Hitthaler	Funzioni trascendenti - Geometria analitica - Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II
Lucia Perissinotto	Funzioni trascendenti - Geometria analitica - Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II
Pietro Sinico	Geometria I - Geometria II

La presente opera è distribuita secondo le attribuzioni della [Creative Commons](#).

La versione corrente è la 

In particolare chi vuole redistribuire in qualsiasi modo l'opera, deve garantire la presenza della prima di copertina e della intera Parte Contributi composta dai paragrafi: Contributi e licenza.

Settembre 2012

Dipartimento di Matematica
ITIS V. Volterra
San Donà di Piave