TEORIA DELLA PROBABILITÀ II

Dipartimento di Matematica

ITIS V.Volterra
San Donà di Piave

Versione [2015-16]

Indice

Capitolo 1

Calcolo combinatorio

1.1 Introduzione

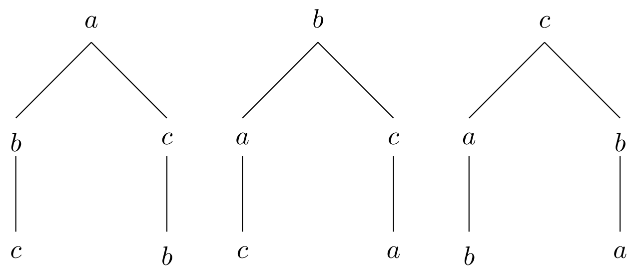
Il *Calcolo Combinatorio* è quella parte della matematica che determina e conta i raggruppamenti che si possono formare con **k** oggetti di un insieme finito di **n** oggetti seguendo, di volta in volta, regole definite a priori.
Tali raggruppamenti si possono, infatti, costruire tenendo conto di alcune caratteristiche che li denotano. Essi possono variare per:

- **composizione**, cioè per i diversi oggetti che vi fanno parte;
- **ordine**, cioè per la diversa posizione occupata dagli oggetti;
- **ripetizione**, cioè per la possibilità che un oggetto compaia più volte.

1.2 Permutazioni

Esempio 1.2.1. Dato l'insieme $A = \{a, b, c\}$, quanti sono i modi in cui possiamo riempire 3 caselle usando gli elementi di A?

Se a è il primo elemento della terna, ci sono 2 possibilità per riempire le caselle successive: a, b, c e a, c, b; allo stesso modo, se il primo elemento è b (oppure c) si ottengono le terne b, a, c e b, c, a (oppure c, a, b e c, b, a).
Schematicamente:



In definitiva ci sono 6 modi diversi di riempire le 3 caselle usando gli elementi di A:

$$abc,\ bac,\ cab$$

$$acb,\ bca,\ cba$$

Definizione 1.2.1. Diremo *Permutazioni Semplici* di **n** oggetti i raggruppamenti che si possono fare con gli **n** oggetti presi a **n** a **n**; due permutazioni **differiscono tra loro solo per l'ordine**.

Volendo contare le permutazioni, immaginiamo di dover riempire **n** caselle con gli **n** oggetti: abbiamo n modi diversi per riempire la prima casella, ne rimangono solo (n-1) per la seconda, (n-2) per la terza, ..., solo uno per l'ultima. Complessivamente ci saranno $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ modi diversi per riempire le n caselle.
Indicando con P_n il numero delle permutazioni, abbiamo:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Il numero $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ è chiamato **n fattoriale**, il suo simbolo è **n!** e per convenzione **0!=1** e **1!=1**.
Inoltre, lo studente attento noterà facilmente che dalla definizione segue che

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Perciò possiamo anche scrivere:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \qquad n \in \mathbb{N}$$

Esempio 1.2.2. Dato l'insieme $A = \{a, m, o, r\}$, quante parole (anche prive di significato) si possono formare utilizzando una sola volta gli elementi di A?

Se a è la prima lettera della parola, ci sono 3 possibilità per scegliere la seconda, ne restano 2 per scegliere la terza e solo una per completare la parola: *amor*, *amro*, *aomr*, *aorm*, *armo*, *arom*; allo stesso modo, se la prima lettera è m si ottengono le parole *maor*, *maro*, *moar*, *mora*, *mrao*, *mroa*; allo stesso modo, se la prima lettera è o si ottengono le parole *oamr*, *oarm*, *omar*, *omra*, *oram*, *orma*; allo stesso modo, se la prima lettera è r si ottengono le parole *ramo*, *raom*, *rmao*, *rmoa*, *roam*, *roma*;

In definitiva ci sono 24 cioè $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ parole diverse formate con gli elementi di A.

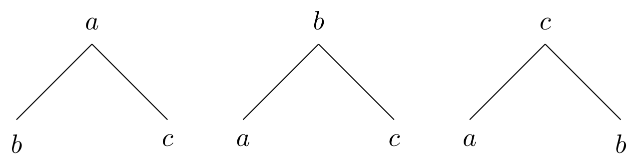
Esercizio 1.2.1. In quanti modi diversi 5 amici patentati possono prendere posto in una macchina omologata per 5?

Esercizio 1.2.2. In quanti modi diversi 6 passeggeri possono sedersi in una fila di 6 posti di un aereo?

1.3 Disposizioni Semplici

Esempio 1.3.1. Dato l'insieme $A = \{a, b, c\}$, quanti sono i modi in cui possiamo riempire 2 caselle usando gli elementi di A?

Se a è il primo elemento della coppia, ci sono 2 possibilità per riempire la casella successiva: a, b e a, c; allo stesso modo, se il primo elemento è b (oppure c) si ottengono le coppie b, a e b, c (oppure c, a e c, b).
Schematicamente:



In definitiva ci sono 6 modi diversi di riempire le 3 caselle usando gli elementi di A:

$$ab,\ ba,\ ca$$

$$ac,\ bc,\ cb$$

Definizione 1.3.1. Diremo *Disposizioni Semplici* di **n** oggetti presi a **k** a **k** i raggruppamenti che si possono fare con **k** degli **n** oggetti; due disposizioni **differiscono tra loro per almeno un oggetto oppure per l'ordine**.

Volendo contare le disposizioni semplici, immaginiamo di dover riempire **k** caselle con gli **n** oggetti: abbiamo n modi diversi per riempire la prima casella, ne rimangono solo (n-1) per la seconda, (n-2) per la terza, ..., (n-k+1) per la k-esima. Complessivamente ci saranno $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$ modi diversi per riempire le k caselle.
Indicando con $D_{n,k}$ il numero delle disposizioni semplici, abbiamo:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) \qquad n, k \in \mathbb{N},\ k \leq n$$

Lo studente attento noterà che da quanto visto finora si ottiene facilmente che:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esempio 1.3.2. Dato l'insieme $A = \{a, m, o, r\}$, quante parole (anche prive di significato) si possono formare utilizzando una sola volta 2 degli elementi di A?

Se a è la prima lettera della parola, ci sono 3 possibilità per scegliere la seconda e quindi completare la parola: am, ao, ar, ; allo stesso modo, se la prima lettera è m si ottengono le parole ma, mo, mr; allo stesso modo, se la prima lettera è o si ottengono le parole oa, om, or; allo stesso modo, se la prima lettera è r si ottengono le parole ra, rm, ro.

In definitiva ci sono 12 cioè $D_{4,2} = 4 \cdot 3$ parole diverse formate con 2 degli elementi di A.

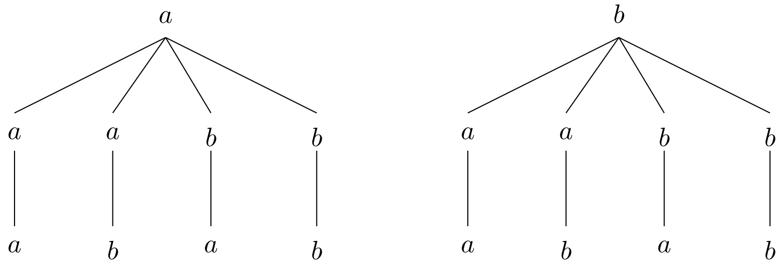
Esercizio 1.3.1. In quanti modi diversi 5 amici possono sedersi sui 3 posti liberi di un cinema per assistere alla proiezione di un film (consideriamo diversi due modi che differiscono per l'ordine)?

Esercizio 1.3.2. In quanti modi si possono determinare password diverse prendendo 4 elementi distinti dall'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, x, y\}$?

1.4 Disposizioni con Ripetizione

Esempio 1.4.1. Dato l'insieme $A = \{a, b\}$, quanti sono i modi in cui possiamo riempire 3 caselle usando gli elementi di A anche ripetuti più volte?

Se a è il primo elemento della terna, le possibilità per riempire le due caselle successive sono: aaa, aab, aba, abb ; allo stesso modo, se il primo elemento è b si ottengono le terne baa, bab, bba, bbb.
Schematicamente:



In definitiva ci sono 8 modi diversi di riempire le 3 caselle usando gli elementi di A:

$$aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$$

Definizione 1.4.1. Diremo *Disposizioni con Ripetizione* di **n** oggetti presi a **k** a **k** i raggruppamenti che si possono fare con **k** degli **n** oggetti; due disposizioni con ripetizione **differiscono tra loro per almeno un oggetto oppure per l'ordine e uno stesso oggetto può essere ripetuto fino a k volte**.

Volendo contare le disposizioni con ripetizione, immaginiamo di dover riempire **k** caselle con gli **n** oggetti: abbiamo n modi diversi per riempire la prima casella, ancora n modi diversi per la seconda, n modi diversi per la terza, ..., n modi anche per la k-esima. Complessivamente ci saranno n^k modi diversi per riempire le k caselle.
Indicando con $D'_{n,k}$ il numero delle disposizioni con ripetizione, abbiamo:

$$D'_{n,k} = n^k \qquad n, k \in \mathbb{N}$$

Osservazione. Si noti che mentre per calcolare il numero delle disposizioni semplici deve essre $k \leq n$, per le disposizioni con ripetizione k è un naturale qualsiasi.

Esempio 1.4.2. Dato l'insieme $A = \{a, m, o, r\}$, quante parole (anche prive di significato) si possono formare utilizzando anche ripetuti 2 degli elementi di A?

Se a è la prima lettera della parola, ci sono 4 possibilità per scegliere la seconda e quindi completare la parola: aa, am, ao, ar, ; allo stesso modo, se la prima lettera è m si ottengono le parole ma, mm, mo, mr; allo stesso modo, se la prima lettera è o si ottengono le parole oa, om, oo, or; allo stesso modo, se la prima lettera è r si ottengono le parole ra, rm, ro, rr.

In definitiva ci sono 16 cioè $D'_{4,2} = 4^2$ parole diverse formate con 2 degli elementi di A anche ripetuti.

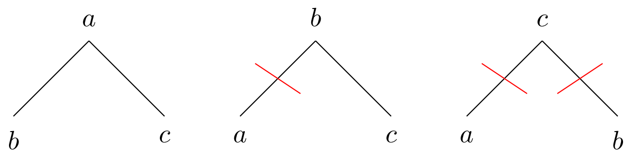
Esercizio 1.4.1. In quanti modi diversi si possono disporre i simboli $1, X, 2$ sulle 13 colonne di una schedina del totocalcio?

Esercizio 1.4.2. In quanti modi si possono determinare password diverse prendendo 4 elementi anche ripetuti dall'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, x, y\}$?

1.5 Combinazioni

Esempio 1.5.1. Dato l'insieme $A = \{a, b, c\}$, quanti sono i modi in cui possiamo riempire 2 caselle usando gli elementi di A indipendentemente dal loro ordine? Ovvero, ci stiamo chiedendo quanti sottoinsiemi di 2 elementi possiamo formare.

Se a è il primo elemento della coppia, ci sono 2 possibilità per riempire la casella successiva: a, b e a, c; se, invece, il primo elemento è b si ottiene solo la coppia b, c perchè la coppia b, a equivale alla coppia a, b già trovata; se, invece, il primo elemento è c non c'è nessun'altra coppia che non equivalga a una delle precedenti.
Schematicamente, costruiamo dapprima tutte le possibili coppie di 2 elementi riservandoci di eliminare successivamente i ”‘doppioni”’ cioè le coppie equivalenti in quanto differenti solo per l'ordine:



In definitiva ci sono 3 modi diversi di riempire le 2 caselle usando gli elementi di A indipendentemente dal loro ordine:

$$ab,\ ac,\ bc$$

Definizione 1.5.1. Diremo *Combinazioni Semplici* di **n** oggetti presi a **k** a **k** i raggruppamenti che si possono fare con **k** degli **n** oggetti indipendentemente dal loro ordine; due combinazioni **differiscono tra loro per almeno un oggetto**.

Volendo contare le combinazioni semplici, contiamo dapprima le disposizioni semplici di n oggetti presi a k a k e poi per eliminare i "'doppioni"' dividiamo per il numero delle permutazioni di k oggetti. Indicando con $C_{n,k}$ il numero delle combinazioni semplici, abbiamo:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \qquad n, k \in \mathbb{N},\ k \leq n$$

Il numero $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$ è chiamato **coefficiente binomiale**, si legge "'**n sopra k**"', il suo simbolo è $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$ e per convenzione $\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) = 1$.
Perciò possiamo anche scrivere:

$$C_{n,k} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$$

Osservazione. Si noti che nella formula

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

il numero dei fattori a numeratore è k come quelli presenti nel denominatore:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}^{k fattori}}{\underbrace{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1}_{k fattori}}$$

Esempio 1.5.2. Un gruppo di 6 amici, Alessandro, Enrico, Fabio, Giorgio, Matteo e Riccardo vogliono andare al cinema ma hanno solo 4 biglietti; in quanti modi diversi possono scegliere i 4 fortunati?

In questo caso non è possibile che ci siano delle ripetizioni e l'ordine è indifferente.
Se Alessandro è il primo fortunato, ci sono 10 possibilità per completare il gruppo: usando le iniziali dei ragazzi avremo

$$AEFG, AEFM, AEFR, AEGM, AEGR, AEMR,$$
$$AFGM, AFGR, AFMR,$$
$$AGMR$$

se, invece, Alessandro sta a casa ed Enrico è il primo della lista, ci sono 4 possibilità per completare il gruppo:

$$EFGM, EFGR, EFMR,$$
$$EGMR$$

infine se Alessandro ed Enrico rinunciano, l'unica possibilità è

$$FGMR.$$

In definitiva ci sono 15 cioè $C_{6,4} = \frac{D_{6,4}}{P_4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$ gruppi diversi che possono andare al cinema.

Esercizio 1.5.1. In quanti modi diversi 5 amici possono utilizzare 3 biglietti per assistere ad una partita di calcio?

Esercizio 1.5.2. Quante cartelle bisogna giocare al Lotto per essere sicuri di vincere un terno?

1.5.1 Coefficienti Binomiali

Abbiamo detto sopra che il numero delle combinazioni di **n** oggetti presi a **k** a **k** è

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

vogliamo approfondire ora alcuni aspetti e proprietà di tali coefficienti binomiali.
Dalla definizione

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

segue immediatamente che

$$\binom{n}{1} = n \qquad \text{e} \qquad \binom{n}{n} = 1$$

Dimostriamo, inoltre, le due proprietà seguenti:

$$\mathcal{P}_1) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\mathcal{P}_2) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Dim. $\mathcal{P}_1$)
partendo dal secondo membro dell'uguaglianza da dimostrare, si ha:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{k!(n-k)!} =$$
$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

avendo semplificato numeratore e denominatore per $(n-k)!$. □

Dim. $\mathcal{P}_2$)
partendo dal secondo membro dell'uguaglianza da dimostrare, si ha:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(n-k)+1)}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (k+1)}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (k+1) \cdot k!}{(n-k)!k!} =$$
$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

avendo moltiplicato numeratore e denominatore per $k!$ e usato la precedente proprietà. □

1.5.2 Formula del Binomio di Newton

Teorema 1.5.1. *Dati due numeri reali a, b e un numero naturale non nullo n, vale la seguente uguaglianza*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Dimostrazione. Osserviamo dapprima che

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot ... \cdot(a+b)}_{nfattori}$$

è un polinomio omogeneo di grado n, costituito da monomi la cui parte letterale è $a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, ..., a^2b^{n-2}, ab^{n-1}, b^n$ il problema è individuarne i rispettivi coefficienti.

Il coefficiente di $a^{n-k}b^k$ è $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$ perchè i modi diversi di moltiplicare $n-k$ fattori uguali ad a con k fattori uguali a b prendendoli da ciascuno degli n fattori uguali ad $(a+b)$ sono le combinazioni di **n** oggetti presi a **k** a **k**, cioè $C_{n,k} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot ... \cdot(n-k+1)}{k!}$. □

Lo studente attento noterà l'identità tra i coefficienti del triangolo di Tartaglia e i coefficienti binomiali.

1.6 Conclusione ed esempi riepilogativi

All'inizio del capitolo ci eravamo proposti di determinare e contare i raggruppamenti che si possono formare con **k** oggetti di un insieme finito di **n** oggetti. Arrivati a questo punto risulta chiaro che ci sono diversi modi di procedere:

- se vogliamo prendere tutti gli **n** oggetti e cambiarne solo l'ordine, allora otteniamo le **permutazioni**;
- se vogliamo prendere solo **k** degli **n** oggetti, senza ripeterli, considerando diversi i raggruppamenti in cui l'ordine è cambiato, otteniamo le **disposizioni semplici**;
- se vogliamo prendere **k** oggetti, anche ripetetendoli, pescandoli fra gli **n** oggetti dati, considerando diversi i raggruppamenti in cui l'ordine è cambiato, otteniamo le **disposizioni con ripetizione**;
- se vogliamo prendere solo **k** degli **n** oggetti, senza ripeterli, non contando l'ordine in cui gli oggetti sono disposti, otteniamo le **combinazioni**.

Esempio 1.6.1. Quante sono le cinquine che contengono un determinato terno nel gioco della tombola?

I numeri a disposizione sono 90, di cui 3 vengono fissati; per completare la cinquina ne rimangono da scegliere altri 2 sugli 87 rimasti, non contando nè l'ordine (estrarre prima 27 e dopo 81 o viceversa è la stessa cosa!) nè le ripetizioni (dopo aver estratto un numero non viene rimesso nel sacchetto e quindi non può essere ripescato!), i possibili raggruppamenti sono le combinazioni di 87 oggetti presi a 2 a 2, che sono $C_{87,2} = \dfrac{87\cdot 86}{2\cdot 1} = 3741$.

Esempio 1.6.2. Quanti sono i numeri di 4 cifre, divisibili per 5 e contenenti solo le cifre 2,3,4,5?

Le cifre a disposizione sono 4 ma l'ultima è fissata (perchè un numero sia divisibile per 5 deve finire per 5 o per 0, ma noi abbiamo a disposizione solo il 5!) perciò ne restano da scegliere 3; i raggruppamenti che cerchiamo possono avere le cifre ripetute (uno dei numeri che possiamo ottenere è 5555) e l'ordine è rilevante (2345 è diverso da 3245); si tratta, quindi, delle disposizioni con ripetizione di 4 oggetti presi a 3 a 3, che sono $D'_{4,3} = 4^3 = 64$.

Esempio 1.6.3. Quante linee d'attacco di 5 giocatori ciascuna si possono formare con 7 giocatori?

I giocatori a disposizione sono 7 di cui dobbiamo sceglierne 5; i raggruppamenti che cerchiamo non possono avere i giocatori ripetuti ma l'ordine è rilevante (cambia la formazione se i giocatori si cambiano di posizione); si tratta, quindi, delle disposizioni semplici di 7 oggetti presi a 5 a 5, che sono $D_{7,5} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2520$.

Esempio 1.6.4. Quanti anagrammi, anche privi di significato, si possono ottenere dalla parola "'piuma"'?

Le lettere a disposizione sono 5 di cui dobbiamo cambiare solo l'ordine; si tratta, quindi, delle permutazioni di 5 oggetti, che sono $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Esempio 1.6.5. Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Nell'estrazione contemporanea di due palline, calcola la probalità dell'evento E:"'**i numeri estratti sono entrambi pari**"'.

I casi possibili sono i raggruppamenti di 10 oggetti presi a 2 a 2; non essendoci ripetizioni e non contando l'ordine, si tratta delle combinazioni di 10 oggetti presi a 2 a 2, che sono $C_{10,2} = \dfrac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$.
I casi favorevoli sono i raggruppamenti di 5 oggetti (i soli pari fra 1 e 10 compresi) presi a 2 a 2; non essendoci ripetizioni e non contando l'ordine, si tratta delle combinazioni di 5 oggetti presi a 2 a 2, che sono $C_{5,2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$.
La probabilità cercata, secondo la definizione classica, è $p(E) = \dfrac{10}{45} = \dfrac{2}{9}$

1.7 Esercizi riepilogativi

Esercizio 1.7.1. Quante sono le cinquine che contengono una determinata quaterna nel gioco della tombola?

[86]

Esercizio 1.7.2. Quante sono le cinquine che contengono un determinato ambo nel gioco della tombola?

$$\left[\frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{6}\right]$$

Esercizio 1.7.3. Quanti sono i numeri di 4 cifre, divisibili per 5 e contenenti solo le cifre 2,3,4,5 minori di 5000?

$[64 - 16 = 48]$

Esercizio 1.7.4. Quante linee d'attacco di 5 giocatori ciascuna si possono formare con 7 giocatori, tenendo fissa l'ala destra (che è sempre un giocatore in attacco)?

[360]

Esercizio 1.7.5. Quanti anagrammi, anche privi di significato, si possono ottenere dalla parola "'penna"'? (Si parla, in questo caso, di permutazioni con ripetizione)

$$\left[\frac{P_5}{P_2} = \frac{120}{2} = 60\right]$$

Esercizio 1.7.6. Quanti anagrammi, anche privi di significato, si possono ottenere dalla parola "'nonna"'?

$$\left[\frac{P_5}{P_3} = \frac{120}{6} = 20\right]$$

Esercizio 1.7.7. Quanti anagrammi, anche privi di significato, si possono ottenere dalla parola "'nonno"'?

$$\left[\frac{P_5}{P_3 \cdot P_2} = \frac{120}{12} = 10\right]$$

Esercizio 1.7.8. Dati 10 punti in un piano, a 3 a 3 non allineati, quante rette si possono tracciare congiungendo i punti a 2 a 2?

[45]

Esercizio 1.7.9. Dati 5 punti in un piano, a 3 a 3 non allineati, quante triangoli si possono tracciare congiungendo i punti a 3 a 3?

[10]

Esercizio 1.7.10. In un'urna ci sono 20 palline numerate da 1 a 20 e 5 di queste sono bianche, mentre le rimanenti sono di un altro colore. Quante quaterne si possono estrarre in modo che in ognuna di esse ci sia almeno una pallina bianca? (Togli da tutte le possibili quaterne quelle che non contengono alcuna pallina bianca)

[3480]

Esercizio 1.7.11. In un cassetto ci sono cinque paia di calzini di 5 colori diversi. Qual è la probabilità di estrarre un paio di calzini dello stesso colore (al buio, naturalmente!)?

$$\left[\frac{1}{9}\right]$$

Esercizio 1.7.12. In un cassetto ci sono cinque paia di calzini di 5 colori diversi, di cui un paio bianco. Qual è la probabilità di estrarre il paio di calzini bianco (al buio, naturalmente!)?
(suggerimento:
si considerino gli eventi
A:"'**il primo calzino estratto è bianco**"'
B:"'**il secondo calzino estratto è bianco**"'
$B \cap A$: ="'**entrambi i calzini estratti sono bianchi**"'
$B|A$:"'**il secondo calzino estratto è bianco nell'ipotesi che anche il primo lo fosse**"'
$p(B \cap A) = p(A) \cdot p(B|A)$)

$$\left[\frac{1}{45}\right]$$

Esercizio 1.7.13. Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Nell'estrazione contemporanea di due palline, calcola la probalità dell'evento E:"'**i numeri estratti sono entrambi dispari**"'.

$$\left[\frac{2}{9}\right]$$

Esercizio 1.7.14. Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Nell'estrazione contemporanea di due palline, calcola la probalità dell'evento E:"'**i numeri estratti sono uno pari e uno dispari**"'.

$$\left[\frac{5}{9}\right]$$

Esercizio 1.7.15. Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Nell'estrazione contemporanea di tre palline, calcola la probalità dell'evento E:"'**esce il 3**"'.

$$\left[\frac{3}{10}\right]$$

Esercizio 1.7.16. Un marinaio dispone di 5 bandiere di colori diversi; quanti messaggi differenti può inviare utilizzando fino a tre bandiere, potendo riutilizzare la stessa bandiera? E quanti, invece, non potendola riutilizzare?

[155; 85]

Esercizio 1.7.17. Nel lancio di 5 dadi regolari qual è la probabilità di ottenere come somma un numero pari?
(Test di ammissione alla facolità di Medicina, 2012)

Parte I

Contributi

Contributi e licenza

Erica Boatto	Algebra I - Algebra II - Insiemi - Esercizi di geometria metrica
Beniamino Bortelli	Grafici
Roberto Carrer	Coordinatore progetto - Numeri - Funzioni - Algebra Lineare - Integrazione - Matematica 5 - Statistica descrittiva - Sistemi dinamici
Morena De Poli	Laboratorio matematica
Piero Fantuzzi	Algebra I - Algebra II - Insiemi - Esercizi di geometria metrica
Caterina Fregonese	Analisi (Integrazione) - Esercizi
Carmen Granzotto	Funzioni - Analisi (Integrazione)
Franca Gressini	Funzioni - Statistica descrittiva - Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II - Teoria della probabilità III
Beatrice Hitthaler	Funzioni trascendenti - Geometria analitica Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II
Lucia Perissinotto	Funzioni trascendenti - Geometria analitica Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II
Pietro Sinico	Geometria I - Geometria II

STUDENTI

Matteo Alessandrini classe VA 2012-2013	Algebra Lineare
Simone Simonella classe IVA 2014-2015	Sistemi dinamici

Dipartimento di Matematica
ITIS V.Volterra
San Donà di Piave