TEORIA DELLA PROBABILITÀ III

Dipartimento di Matematica

ITIS V.Volterra
San Donà di Piave

Versione [2015-16]

Indice

Capitolo 1

Variabili casuali

1.1 Variabili casuali discrete

In molti fenomeni aleatori il risultato di un esperimento è una grandezza che assume valori in modo casuale.

Esempio 1.1.1. Esito del lancio di una moneta.

Esempio 1.1.2. Punti ottenuti da una squadra di calcio in una partita.

Esempio 1.1.3. Guadagno stimato di un investimento finanziario.

Spesso scriveremo v.c. come abbreviazione per variabile casuale.

Si può pensare alla v.c. come a *una funzione* che associa un numero reale ad ogni evento di una partizione dell'universo che descrive il fenomeno.

Esempio 1.1.4.

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_1 : \quad \mathbb{U}_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{T} &\longmapsto 0 \\ \mathrm{C} &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

dove $\mathbb{U}_1$ descrive i possibili esiti del lancio di una moneta e T e C sono gli eventi che ne costituiscono una partizione.

L'associazione con i numeri 0 e 1 è la più ovvia ma avremmo potuto anche usare altri numeri qualsiasi, per esempio:

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_1 : \quad \mathbb{U}_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{T} &\longmapsto \frac{7}{3} \\ \mathrm{C} &\longmapsto -1.2 \end{aligned}$$

Esempio 1.1.5.

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_2 : \quad & \mathbb{U}_2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \text{Vittoria} \longmapsto 3 \\ & \text{Pareggio} \longmapsto 1 \\ & \text{Sconfitta} \longmapsto 0 \end{aligned}$$

dove $\mathbb{U}_2$ descrive i possibili esiti del lancio di una partita di calcio. L'associazione con i numeri 3, 1 e 0 è suggerita in base al regolamento del campionato di calcio.

Esempio 1.1.6.

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_3 : \quad & \mathbb{U}_3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \mathrm{E}_1 \longmapsto -2 \\ & \mathrm{E}_2 \longmapsto 0 \\ & \mathrm{E}_3 \longmapsto 1 \\ & \mathrm{E}_4 \longmapsto 3 \end{aligned}$$

dove $\mathbb{U}_3$ descrive i possibili esiti aleatori (casuali) che influenzano un certo investimento finanziario: andamento della Borsa, situazione storica, ecc.. I numeri associati rappresentano il guadagno ipotizzato valutato, per esempio, in migliaia di euro.

Quindi: se si verifica una situazione rappresentata dall'evento E_1 si perdono 2.000 euro, se si verifica una situazione rappresentata dall'evento E_2 non si guadagna nulla e così via.

Le corrispondenze definite dalle funzioni descritte negli esempi visti sopra stabiliscono relazioni fra gli eventi del mondo reale e i numeri; così si gettano le basi di un *modello* matematico capace di descrivere un fenomeno aleatorio.

1.2 Funzione distribuzione di probabilità

Definizione 1.2.1. La funzione:

$$\begin{aligned} \mathrm{X} : \quad & \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \mathrm{E}_i \longmapsto x_i \end{aligned}$$

$$\text{dove } \{E_i\} \text{ è una partizione di } \mathbb{U} \text{ e } i = 1, 2, 3, \cdots, n$$

si dice *variabile casuale*.

Poichè X descrive un fenomeno aleatorio, è necessario specificare la probabilità che si verifichi ciascuno degli eventi E_i e quindi la probabilità che la variabile casuale X assuma ciascuna sua determinazione x_i.

Si dà allora la:

Definizione 1.2.2. Diciamo *funzione di distribuzione* la funzione

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \\ & x_i \longmapsto p_i \qquad \text{probabilità che la v.c. } X \text{ assuma valore } x_i \end{aligned}$$

dove

$$0 \leq p_i \leq 1$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

in quanto $\{E_i\}$ con $i = 1, 2, \cdots, n$ formano una partizione di $\mathbb{U}$.

Per conoscere completamente il fenomeno aleatorio si devono quindi costruire le funzioni X e f:

$$\begin{aligned} & \mathbb{U} \xrightarrow{X} X(\mathbb{U}) \xrightarrow{f} [0,1] \\ & \mathrm{E}_i \longmapsto x_i \longmapsto p_i \end{aligned}$$

Esempio 1.2.1. Lancio di una moneta regolare (teoria classica)

$$\begin{aligned} & \mathbb{U} \longrightarrow X(\mathbb{U}) \longrightarrow [0,1] \\ & \mathrm{T} \longmapsto 0 \longrightarrow \frac{1}{2} \\ & \mathrm{C} \longmapsto 1 \longrightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Esempio 1.2.2. Partita di calcio con probabilità assegnata in base alla teoria soggettiva

$$\begin{aligned} & \mathbb{U} \longrightarrow X(\mathbb{U}) \longrightarrow [0,1] \\ & \text{Vittoria} \longmapsto 3 \longrightarrow 0.60 \\ & \text{Pareggio} \longmapsto 1 \longrightarrow 0.30 \\ & \text{Sconfitta} \longmapsto 0 \longrightarrow 0.10 \end{aligned}$$

Esempio 1.2.3. Investimento finanziario con probabilità assegnata in base alla teoria frequentista e/o soggettiva

$$\begin{aligned} & \mathbb{U} \longrightarrow X(\mathbb{U}) \longrightarrow [0,1] \\ & \mathrm{E}_1 \longmapsto -2 \longrightarrow 15\% \\ & \mathrm{E}_2 \longmapsto 0 \longrightarrow 20\% \\ & \mathrm{E}_3 \longmapsto 1 \longrightarrow 40\% \\ & \mathrm{E}_4 \longmapsto 3 \longrightarrow 25\% \end{aligned}$$

La scrittura può essere così semplificata:
Esempio 1.2.1

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Esempio 1.2.2

$$X_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0.60 & 0.30 & 0.10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0.10 & 0.30 & 0.60 \end{pmatrix} \quad \text{con valori } x_i \text{ crescenti.}$$

Esempio 1.2.3

$$X_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0.15 & 0.20 & 0.40 & 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0.15 & 0.20 & 0.40 & 0.25 \end{pmatrix}$$

e quindi, in generale, una variabile casuale X si presenta così:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots & p_n \end{pmatrix} \quad \text{con } 0 \leq p_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Si noti come questo tipo di scrittura abbia perso le tracce dell'universo $\mathbb{U}$ e dei suoi eventi ma, in quanto modello matematico, ne rappresenta ancora tutti gli aspetti significativi in forma simbolica.

Negli esempi trattati la v.c. discreta X assume un numero n finito di valori. Può assumere anche infiniti valori, purchè numerabili.

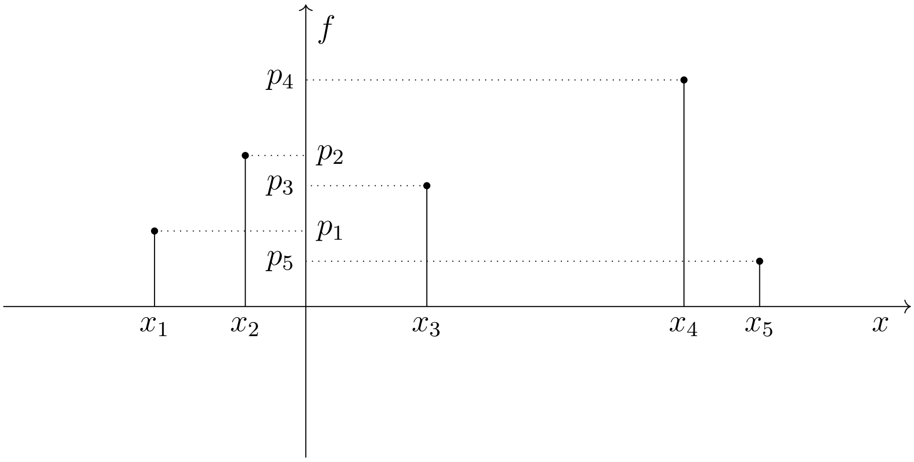
Ad esempio sia X_4 la v.c. che descrive il numero di successi in un numero illimitato di prove aventi solo due esiti possibili (questa variabile descrive il famoso modello di Poisson). E' evidente che X_4 assume i valori:

$$0, 1, 2, 3, \cdots, i, \cdots, n, \cdots$$

in quantità numerabile. Quindi una v.c. discreta può assumere un numero finito o numerabile di valori.

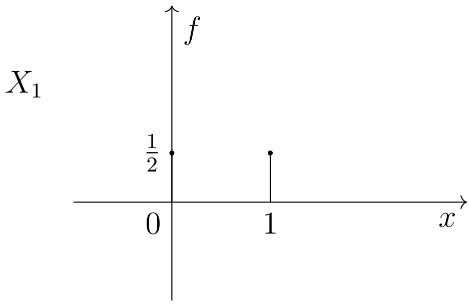
1.3 Rappresentazione grafica

Può essere utile descrivere la variabile casuale X con un grafico a barre di questo tipo:

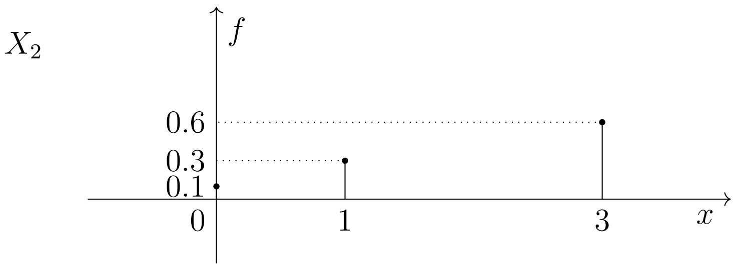


Ecco alcuni esempi.

Esempio 1.3.1 (1.2.1)**.**



Esempio 1.3.2 (1.2.2)**.**



1.4 Funzione ripartizione di probabilità

Può essere utile avere uno strumento che valuti la probabilità di eventi composti. Per esempio:

- qual è la probabilità che la squadra di calcio guadagni almeno un punto?
- con quale probabilità guadagno qualcosa nell'investimento descritto nell'esempio 1.2.3?

Definiamo allora:

Definizione 1.4.1. La funzione:

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto P(X \leq x) \end{aligned}$$

probabilità accumulata fino a $x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

si dice *funzione di ripartizione* o *funzione della probabilità cumulata.*

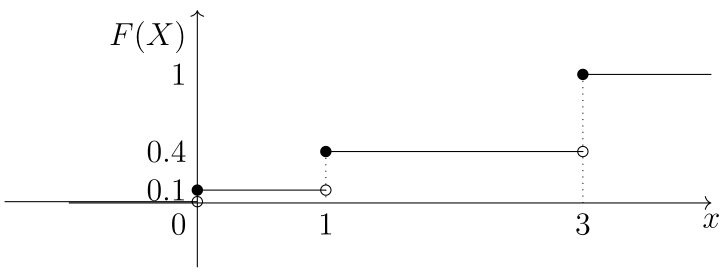
Essendo definita in tutto $\mathbb{R}$, conviene determinarla nel seguente modo:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < x_1 \\ p_1 & \text{per } x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{per } x_2 \leq x < x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & \text{per } x_3 \leq x < x_4 \\ \dots & \dots \\ 1 & \text{per } x \geq x_n \end{cases}$$

Applichiamo la definizione all'esempio 1.2.2:

$$F(x_2) = \begin{cases} 0 & \text{per } x_2 < 0 \\ 0.10 & \text{per } 0 \leq x_2 < 1 \\ 0.40 & \text{per } 1 \leq x_2 < 3 \\ 1 & \text{per } x_2 \geq 3 \end{cases}$$

la cui rappresentazione grafica è:



Possiamo così rispondere alle domande:

- qual'è la probabilità di guadagnare al massimo un punto?

$$P(x_2 \leq 1) = F(1) = 0.40$$

- qual'è la probabilità di guadagnare almeno un punto?

$$P(x_2 \geq 1) = 1 - P(x_2 < 1) = 1 - F(0) = 1 - 0.10 = 0.90$$

Quindi la funzione $f(x)$ valuta gli eventi $X = x_i$ mentre la funzione $F(x)$ valuta gli eventi $X \leq x_i$. Nel campo discreto la funzione $f(x)$ è sufficiente per descrivere qualsiasi tipo di evento (semplice o composto: basta sommare le probabilità), mentre quando si affrontano le v.c. continue è indispensabile l'utilizzo della ripartizione $F(X)$.

Mettiamo in evidenza alcune notevoli proprietà della funzione $F(X)$:

- per $x \mapsto -\infty \Longrightarrow F(X) \mapsto 0$; per $x \mapsto +\infty \Longrightarrow F(X) \mapsto 1$
- $F(X)$ non è mai decrescente
- $F(X)$ è discontinua in corrispondenza ai valori x_i della v.c. e il "salto" della $F(X)$ corrisponde al valore della probabilità in x_i.

1.5 Funzione di variabile casuale

Definizione 1.5.1. Data la v.c.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

si definisce come *funzione di v.c.* X la v.c.

$$Y = g(X) = \begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \cdots & g(x_i) & \cdots & g(x_n) \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

dove i dei valori della variabile Y sono calcolati come immagini della funzione $g(X)$, mentre la distribuzione di probabilità rimane la stessa.

Esempio 1.5.1. E' data

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & \frac{2}{8} \end{pmatrix}$$

determinare $Y = 3X - 1$ e $Z = X^2 + 1$.

Si ha:

$$Y = \begin{pmatrix} -10 & -1 & 5 & 8 \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & \frac{2}{8} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Z = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 5 & 10 \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & \frac{2}{8} \end{pmatrix}$$

La Z va semplificata perchè contiene due colonne con lo stesso valore di v.c. e quindi diventa:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \\ \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

dove al valore 10 corrisponde la somma delle probabilità che lo hanno determinato.

Esempio 1.5.2. Descrivere la v.c. X che calcola la somma dei punteggi ottenuti lanciando due dadi regolari. Calcolare la probabilità che la somma sia superiore a 6.

Il lancio di due dadi e la somma dei loro punteggi può essere riassunto in una tabella:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

dalla quale si deduce

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

La distribuzione di probabilità è stata ricavata applicando la teoria classica, cioè valutando il numero dei casi favorevoli e dei casi possibili. Calcoliamo ora $P(x > 6)$

$$P(x > 6) = \sum_{k=7}^{12} P(k) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

Esempio 1.5.3. Un'urna contiene palline numerate da 1 a 40. Estratta una pallina:

i) descrivere la v.c. X: valore della prima cifra del numero estratto

ii) descrivere la funzione di ripartizione $F(X)$

iii) calcolare la probabilità che $x > 2$ e che $1 < x \leq 3$

iv) descrivere la v.c. $Y = 2X - 1$

Soluzione:

i) Utilizzando la teoria classica delle probabilità, si ottiene:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{9}{40} & \frac{10}{40} & \frac{10}{40} & \frac{10}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}$$

ii)

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \frac{9}{40} & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ \frac{19}{40} & \text{per } 1 \leq x < 2 \\ \frac{29}{40} & \text{per } 2 \leq x < 3 \\ \frac{39}{40} & \text{per } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{per } x \geq 4 \end{cases}$$

iii) $P(x > 2) = P(x = 3) + P(x = 4) = \dfrac{11}{40}$

$P(1 < x \leq 3) = P(x = 2) + P(x = 3) = \dfrac{1}{2}$

iv)

$$Y = 2X - 1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ \frac{9}{40} & \frac{10}{40} & \frac{10}{40} & \frac{10}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}$$

Esempio 1.5.4. Sono date due urne $\mathbb{U}_1$ e U_2 aventi la seguente composizione di palline bianche e nere:

	nere	bianche
$\mathbb{U}_1$	3	7
$\mathbb{U}_2$	6	4

si estraggono due palline: una da $\mathbb{U}_1$ e l'altra da U_2. Determinare la v.c. X = numero di palline nere estratte.

Soluzione: la v.c. assume valori $0, 1$, o 2 con queste probabilità:

$$P(x = 0) = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{28}{100}$$
$$P(x = 1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{54}{100}$$
$$P(x = 2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{18}{100}$$

si ottiene quindi:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{28}{100} & \frac{54}{100} & \frac{18}{100} \end{pmatrix}$$

1.6 Esercizi

Esercizio 1.6.1. Determinare il valore del parametro k affinchè X sia una variabile casuale:

i)

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 10 \\ \dfrac{k}{2} & \dfrac{k}{3} & 2k & 3k \end{pmatrix}$$

ii)

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ k & \dfrac{3}{2}k & 2k \end{pmatrix}$$

Esercizio 1.6.2. Si lancia 3 volte una moneta. Descrivere le seguenti variabili casuali:

X_1 : numero delle croci

X_2 : lunghezza massima di una sequenza

Esercizio 1.6.3. Ricavare la v.c. X, nota la funzione di ripartizione:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -3 \\ 0.1 & \text{per } -3 \leq x < -1 \\ 0.35 & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ 0.60 & \text{per } 0 \leq x < 3 \\ 0.80 & \text{per } 3 \leq x < 10 \\ 1 & \text{per } x \geq 10 \end{cases}$$

Esercizio 1.6.4. Si estrae una pallina da un'urna contenente 25 palline numerate:

i) : determinare la v.c. X: cifra delle unità del numero estratto

ii) : determinare poi la funzione di ripartizione di X e calcolare $P(x < 1)$; $P(1 \leq x < 4)$; $P(x \geq 8)$.

Esercizio 1.6.5. Determinare e rappresentare graficamente la funzione distribuzione e la funzione ripartizione di probabiità della variabile casuale: X = minore dei due numeri usciti nel lancio di due dadi.

Determinare poi la variabile $Z = 2X^2 + 1$

Esercizio 1.6.6. Un'urna contiene 5 palline numerate da 1 a 5; si estraggono a blocco 2 palline.

Detreminare la v.c. X = somma dei 2 numeri estratti.

Determinare poi la v.c. Y relativa nel caso le estrazioni siano con rimessa.

Esercizio 1.6.7. Un'urna contiene 20 palline numerate da 1 a 20. Si estrae una sola pallina.

- Determinare e tracciare il grafico della distribuzione e della ripartizione della v.c. X = differenza tra la cifra delle unità e la cifra delle decine del numero estratto.
- Confrontare i grafici di X con quelli della variabile $Y = -2X + 1$.

Esercizio 1.6.8. Un'urna contiene 5 gettoni segnati dalle cifre $-3; -1; 0; 1; 4$. Si esegue un'estrazione a blocco di 2 gettoni. Determinare le v.c.

- X = differenza in valore assoluto dei valori assoluti delle cifre estratte.
- Y = massimo dei valori delle cifre estratte.
- $Z = X \mod 3$

1.7 Indici di una variabile casuale discreta

Si possono definire alcuni parametri numerici che evidenziano importanti proprietà delle varibili casuali, quali la tendenza centrale, la variabilità, ecc.

Talvolta la sola conoscenza di questi indici consente di farsi un'idea sulla natura della variabile casuale.

1.7.1 Il valor medio

Definizione 1.7.1. Data una v.c.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

si dice *valor medio* (o valore atteso o speranza matematica di X) il numero:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

$E(X)$ è un valore teorico che sintetizza l'intera variabile X, costituendone una specie di baricentro. $E(X)$ è tale che $x_i \leq E(X) \leq x_n$ e può assumere un valore diverso da $x_i, \forall i = 1 \cdots n$.

Esempio 1.7.1. Data la variabile che descrive il guadagno nell'investimento finanziario descritto nell'esempio 1.2.3

$$X_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0.15 & 0.20 & 0.40 & 0.25 \end{pmatrix}$$

si ottiene:

$$E(X) = -2 \cdot 0.15 + 0 \cdot 0.20 + 1 \cdot 0.40 + 3 \cdot 0.25 = 0.85$$

Ciò significa che si può ipotizzare un guadagno medio di 850 €.

Come si comprende facilmente, il valore atteso $E(X)$ rappresenta anche un carattere di previsione. Se consideriamo un numero elevato di prove relative ad un certo esperimento aleatorio, in base alla teoria frequentista, sappiamo che la frequenza relativa approssima la probabilità, così come la media aritmetica approssima il valor medio. Possiamo quindi dire che il valor medio $E(X)$ permette di fare una previsione teorica del risultato dell'esperimento.

Esempio 1.7.2. Una ditta produce un certo bene A. Si deve stabilire la quantità di bene da produrre in relazione alla probabilità di vendita, descritta dalla seguente variabile:

$$X_A = \begin{pmatrix} 300 & 350 & 400 & 500 \\ 0.30 & 0.25 & 0.35 & 0.10 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$E(X_A) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 367.5 \text{ unità di bene } A$$

che rappresenta la quantità di bene A da produrre.

Esempio 1.7.3. Consideriamo la variabile dell'esempio 1.5.2. Essendo simmetrica, il significato baricentrico del valor medio ci porta facilmente a trovare $E(X) = 7$, che rappresenta così la somma media attesa nel lancio di due dadi.

Se la variabile casuale X rappresenta il guadagno di un gioco aleatorio (gioco d'azzardo) il valore atteso (qui detto "speranza matematica") misura *l'equità* del gioco medesimo:

- se $E(X) > 0$ il gioco è favorevole al giocatore
- se $E(X) = 0$ il gioco non è favorevole né sfavorevole al giocatore
- se $E(X) < 0$ il gioco è sfavorevole al giocatore

Nel caso $E(X) = 0$ il gioco si dice *equo*.

Esempio 1.7.4. Supponiamo che

$$X = \begin{pmatrix} -3000 & 4500 \\ \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

rappresenti un certo gioco d'azzardo.

$$E(X) = -3000 \cdot \frac{5}{9} + 4500 \cdot \frac{4}{9} = 333.\bar{3}$$

quindi il gioco è favorevole al giocatore.

Esempio 1.7.5. Un giocatore punta 10 € sul lancio di un dado e vince se escono 1 o 5. Determinare la posta del banco affinchè il gioco sia equo.

- Il giocatore vince con probabilità $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.
- Il banco vince con probabilità $\dfrac{2}{3}$.

La variabile X che descrive la vincita del giocatore è:

$$X = \begin{pmatrix} -10 & k \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e quindi $E(X) = -10 \cdot \dfrac{2}{3} + k \cdot \dfrac{1}{3}$

Perché il gioco sia equo bisogna che $E(X) = 0$ e quindi:

$$-\frac{20}{3} + \frac{k}{3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 20$$

e quindi:

$$X = \begin{pmatrix} -10 & 20 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

descrive un gioco equo.

1.7.2 Varianza e deviazione standard

Questi due indici misurano la dispersione dei valori rispetto al valor medio. In pratica sono definiti attraverso il valor medio degli scarti al quadrato:

Definizione 1.7.2. *Varianza*:

$$VAR(X) = \sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i$$

Definizione 1.7.3. *Deviazione standard*:

$$DEV.ST(X) = \sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)} = \sqrt{VAR(X)}$$

Sia $VAR(X)$ che $DEV.ST(X)$ sono quantità non negative che risultano nulle se e solo se la v.c. è costante. Per il calcolo di questi due indici di dispersione conviene utilizzare le proprietà di König, che si ottiene sviluppando il quadrato dello scarto nella definizione. Si ottiene così:

$$\begin{aligned}
VAR(X) = \sigma^2(X) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 \cdot p_i \\
&= (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \cdots + (x_n - E(X))^2 p_n \\
&= x_1^2 p_1 - 2E(X)p_1 + E^2(X)p_1 + x_2^2 p_2 - 2E(X)p_2 + E^2(X)p_2 + \cdots + x_n^2 p_n - 2E(X)p_n + E \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2E(x)(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n) + E^2(X)(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)
\end{aligned}$$

riconosciamo $E(X^2)$ nella prima sommatoria, $E(X)$ nella seconda e 1 nella terza

$$=E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + E^2(X) = E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

cioè

$$VAR(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

e, analogamente

$$DEV.ST(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}$$

Esempio 1.7.6. Calcolare $VAR(X_3)$ e $DEV.ST(X_3)$ della v.c. dell'esempio 1.2.3:

$$X_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0.15 & 0.20 & 0.40 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Calcolo la funzione trasformata

$$X_3^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 9 \\ 0.15 & 0.20 & 0.40 & 0.25 \end{pmatrix}$$

e

$$E(X_3^2) = 4 \cdot 0.15 + 0 \cdot 0.20 + 1 \cdot 0.40 + 9 \cdot 0.25 = 3.25$$

In precedenza si è calcolato: $E(X_3) = 0.85$ da cui:

$$VAR(X) = E(X_3^2) - E^2(X_3) = 3.25 - 0.72 = 2.53 \quad (\text{migliaia di } €)^2$$

Si noti che le unità di misura non sono omogenee con quelle della v.c.. Per questo motivo si utilizza la:

$$DEV.ST(X_3) = \sqrt{VAR(X)} = \sqrt{2.53} = 1.59 \quad \text{migliaia di } €$$

Pertanto per l'investimento finanziario si ipotizza un guadagno atteso di 850 € con una deviazione standard di 1590 €.

Nel caso in cui la v.c. descriva un gioco d'azzardo, la deviazione standard (ovvero la varianza) misura il *rischio* correlato al gioco. Più è alto il valore della dispersione più rischioso è il gioco.

Esempio 1.7.7. Calcolare la $DEV.ST$ della v.c. dell'esempio 1.5.2:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

con $E(X) = 7$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & 100 & 121 & 144 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{4 + 18 + 48 + 100 + 180 + 294 + 320 + 324 + 300 + 242 + 144}{36} \\ &= \frac{1974}{36} = 54.8 \end{aligned}$$

$$DEV.ST(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)} = \sqrt{54.8 - 49} = \sqrt{5.8} = 2.41$$

Ciò significa che la media attesa nella somma dei punti nel lancio di due dadi è 7 con uno scostamento medio di 2.41.

1.7.3 Moda o valore modale

La moda corrisponde al valore dotato di massima probabilità: è il valore più probabile. Si indica con $\widehat{X}$ oppure con $MO(X)$. Se la moda è unica, la v.c. si dice *unimodale* altrimenti si dice *bimodale*, *trimodale* e, più in generale, *plurimodale*.

Esempio 1.7.8. La moda della v.c. X_3 dell'esempio 1.2.3 è 1 perché la sua probabilità è la maggiore tra tutte le altre.

Esempio 1.7.9. La moda della v.c. X nella somma dei punteggi nel lancio di due dadi è ovviamente 7, che è il valore più probabile oltre che valor medio.

Nel grafico rappresentativo di una v.c., la moda è il valore di picco del grafico, cioè il valore della barra più alta.

1.7.4 Proprietà di linearità

A volte è utile trattare funzioni lineari di una v.c. X del tipo $Y = aX + b$. Gli indici studiati si comportano così:

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$\sigma^2(Y) = \sigma^2(aX + b) = a^2\sigma^2(X)$$

ovvero

$$\sigma(Y) = \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

La dimostrazione si ricava banalmente dall'applicazione della definizione di valor medio e varianza applicata alla variabile trasformata $ax + b$.

1.7.5 Variabile casuale standardizzata

Tra le funzioni lineari di una v.c. X aventi valor medio $E(X)$ e deviazione $\sigma(X)$ conviene ricordare la variabile standardizzata Z definita così:

Definizione 1.7.4. Si definisce *variabile standardizzata* e si indica con Z la v.c.

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

Osserviamo che risulta [1]:

$$E(Z) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)}\left(E(X) - E(X)\right) = 0$$

[1] Dimostrare le formule per esercizio.

$$\sigma^2(Z) = \sigma^2\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma^2(X)}\sigma^2(X) = 1$$

La v.c. standardizzata risulta molto utile per il confronto tra v.c. che operano in universi differenti, con unità di misura diverse.

In pratica:
se si devono confrontare due variabili X_1 e X_2, conviene passare alle corrispondenti v.c. standardizzate Z_1 e Z_2, che avranno media identica e variabilità espressa in unità standard.

Esempio 1.7.10. La v.c.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

rappresenta i voti in matematica di una classe e

$$X_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

i voti in inglese della stessa classe. Risulta:

$$E(X_1) = 6.5 \quad \sigma(X_1) = 1.2 \quad E(X_2) = 6 \quad \sigma(X_2) = 0.89$$

da cui

$$Z_1 = \frac{X_1 - 6.5}{1.12} = \begin{pmatrix} -1.34 & -0.45 & 1.34 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix} \qquad Z_2 = \frac{X_2 - 6}{0.89} = \begin{pmatrix} -1.12 & 0 & 1.12 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Confrontando Z_1 e Z_2 si nota che il 5 in matematica ha un peso diverso da quello in inglese perché dista maggiormente dalla media 0; infatti il 5 in matematica corrisponde a -1.34 unità standardizzate, mentre quello in inglese corrisponde a -1.12 unità.

1.7.6 Esercizi

Esercizio 1.7.1. Determinare moda, valor medio, e varianza delle variabili casuali degli esempi 1.7.1 e 1.7.2.

Esercizio 1.7.2. In un gioco, un giocatore A che ha probabilità p di vincere, punta una somma S. Determinare la posta X del banco B affinché il gioco sia equo, nei casi:

- a) $S = 30000$ e $p = \dfrac{3}{4}$
- b) $S = 1500$ e $p = \dfrac{1}{10}$

Esercizio 1.7.3. Data la v.c.

$$X = \begin{pmatrix} -k & k \\ a & 1-a \end{pmatrix}$$

determinare i parametri a e k sapendo che $E(X) = \dfrac{2}{3}$ e $E(X^2) = 4$

Esercizio 1.7.4. Per la stessa variabile dell'esercizio precedente, determinare i parametri a e k sapendo che $E(X) = \dfrac{1}{2}$ e $\sigma^2(X) = \dfrac{3}{4}$

Esercizio 1.7.5. Sapendo che la v.c. X ha $E(X) = 3$ e $\sigma^2(X) = \dfrac{3}{8}$ determinare valor medio e varianza delle funzioni di v.c.

$$Z = 3X - 5 \qquad T = \frac{1}{4}X \qquad W = \frac{4-X}{4}$$

Esercizio 1.7.6. Date le v.c. X e Y con

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \text{e } Y = aX + b$$

determinare i parametri a e b sapendo che $E(Y) = 8$ e $\sigma^2(Y) = 12$

1.8 Variabili casuali doppie

Sullo stesso universo $\mathbb{U}$ possono essere definite due o più variabili casuali delle quali si vuole analizzare l'influenza reciproca.

Definizione 1.8.1. Considerate le v.c.:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots & p_n \end{pmatrix} \quad \text{con } 0 \leq p_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_j & \cdots & y_m \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_j & \cdots & q_m \end{pmatrix} \quad \text{con } 0 \leq q_j \leq 1 \text{ e } \sum_{j=1}^{m} q_j = 1$$

diremo *v.c. doppia* la coppia (X, Y).

La v.c. doppia (X, Y) può essere rappresentata da una tabella a doppia entrata:

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	p_{2m}	p_2
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{im}	p_i
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nj}	$\cdots$	p_{nm}	p_n
	q_1	q_2	$\cdots$	q_j	$\cdots$	q_m	1

ove p_{ij}si chiama probabilità congiunta ed è definita così:

Definizione 1.8.2. Si dice *probabilità congiunta*

$$p_{ij} = P(X = x_i \wedge Y = y_j) \quad \forall i, j \quad 0 \leq i \leq n \quad 0 \leq j \leq m$$

$$\text{con } 0 \leq p_{ij} \leq 1 \text{ e } \sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

Sommando le probabilità congiunte su ciascuna riga $(\forall j)$ o su ciascuna colonna $(\forall i)$, si ottengono le probabilità p_i e q_j delle variabili X e Y: in questo contesto le probabilità p_i e q_j si chiamano *marginali.*

Esempio 1.8.1. Sia data la v.c. doppia:

$X \setminus Y$	1	2	3	p_x
0	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$
1	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$
q_y	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

Dalla tabella si deduce che la probabilità che si verifichino contemporaneamente ($X = 1$ e $Y = 2$) è nulla, oppure che la probabilità che si verifichi $X = 0$ è $\dfrac{6}{10}$ oppure che la probabilità che si verifichi $Y = 2$ è $\dfrac{3}{10}$. Si possono quindi scrivere le due varaibili singole:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{6}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}$$

Dalla distribuzione delle probabilità congiunte p_{ij} è sempre possibile determinare le distribuzioni delle probabilità marginali p_i e q_j sommando per righe e per colonne. Non è vero il contrario, perchè la sola conoscenza delle marginali non dà sufficienti informazioni sulla coppia di variabili. Consideriamo, infatti, il seguente esempio:

Esempio 1.8.2.

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{2}{8} \end{pmatrix}$$

Risulta che

$$P(x = 2) = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad P(y = 0) = \frac{1}{8}$$

ma non si può dire nulla della coppia $(2, 0)$ e la probabilità congiunta $P(X = 2 \text{ e } Y = 0)$ non si può valutare senza conoscere le interdipendenze tra le due variabili.

Vediamo, attraverso un esempio, come costruire la distribuzione delle probabilità congiunte.

Esempio 1.8.3. E' data un'urna contenente 3 palline contrassegnate dai numeri: $0; 1; 3$. Si eseguono estrazioni bernoulliane (con rimessa) di due palline e si determinano le seguenti due variabili casuali:

- X: valore assoluto della differenza delle cifre sulle palline estratte
- Y: resto della divisione per 3 della somma delle cifre sulle palline estratte

Determinare la v.c. doppia (X, Y) e la distribuzione delle probabilità congiunte.

SOLUZIONE:

Dall'analisi combinatoriale si deduce che le estrazioni sono $D'_{3,2} = 3^2 = 9$ che formano l'universo delle coppie:

$\mathbb{U}$

0	,	0
0	,	1
0	,	3
1	,	0
1	,	1
1	,	3
3	,	0
3	,	1
3	,	2

Valutiamo ora le variabili X e Y su ciascuna coppia di valori. Per esempio, sulla coppia $(1,3)$ risulta: $X = 2$ perché $2 = |1-3|$ e $Y = 1$ perché $(1+3) \mod 3 = 1$. Si ottiene quindi:

$\mathbb{U}$	X	Y
$0,0$	0	0
$0,1$	1	1
$0,3$	3	0
$1,0$	1	1
$1,1$	0	2
$1,3$	2	1
$3,0$	3	0
$3,1$	2	1
$3,3$	0	0

da cui si possono dedurre le v.c. singole X e Y:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

ove, per esempio, $\dfrac{4}{9}$ significa che il valore 0 della X si verifica 4 volte su 9.

Ora determiniamo la variabile doppia $X, Y)$:

$X \setminus Y$	0	1	2	p_x
0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$
1	0	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{2}{9}$
3	$\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{2}{9}$
q_y	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

dove: $P(x = 0 \text{ e } y = 1) = \dfrac{1}{9}$ perché la coppia $(0,0)$ compare solo 1 volta su 9; $P(x = 2$ e $y = 1) = \dfrac{2}{9}$ perché la coppia $(2,1)$ compare 2 volte su 9; $P(x = 3 \text{ e } y = 2) = 0$ perché la coppia $(3,2)$ non compare mai.

Quindi ciascuna probabilità congiunta è stata calcolata osservando il comportamento di X e Y insieme. Naturalmente la conoscenza delle marginali agevola e semplifica il calcolo delle congiunte che si può completare per differenza. Infatti, una volta calcolati $\dfrac{1}{9}$ e 0 (nella prima riga) il valore della coppia $(0,2)$ si completa per differenza: $\dfrac{3}{9} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{9}$.

1.9 Variabili casuali indipendenti

E' possibile analizzare l'influenza reciproca di due variabili casuali X e Y. Tale influenza può essere così forte da costituire un legame funzionale, cioè il valore di Y si determina come funzione di X; oppure così debole da considerare le due variabili indipendenti tra loro. Tale indipendenza si chiama *stocastica* e significa che le variabili X e Y non si influenzano reciprocamente.

Definizione 1.9.1. Due variabili casuali X e Y, definite sullo stesso universo, si dicono *stocasticamente indipendenti* se risulta:

$$P_{ij} = P(X = x_i \wedge Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \quad \forall\, i, j$$

cioè la probabilità congiunta è uguale al prodotto delle probabilità marginali, per ogni coppia $X = X_i$ e $Y = y_j$.

Esempio 1.9.1. Data la coppia (X, Y) avente la seguente distribuzione congiunta, valutarne lindipendenza:

$X \setminus Y$	0	1	
1	5/12	1/12	
2	2/12	2/12	
3	1/12	1/12	

Soluzione: determiniamo le probabilità marginali sommando per righe e per colonne e poi calcoliamo i prodotti $p_x \cdot q_y$ in ciascuna casella.

$X \setminus Y$	0	1	p_x
1	48/144	24/144	6/12
2	32/144	16/144	4/12
3	16/144	8/144	2/12
q_y	8/12	4/12	1

Confrontando le due tabelle, si nota che vi è almeno una probabilità congiunta che non è data dal prodotto delle probabilità marginali:

$$p(x = 2 \wedge y = 1) = \frac{2}{12} \neq \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12} = p_2 \cdot q_1$$

quindi si deduce che X e Y non sono stocasticamente indipendenti.

Risulta pertanto evidente che, se due variabili X e Y sono indipendenti, la determinazione della distribuzione congiunta è banale: basta moltiplicare le probabilità marginali.

Esempio 1.9.2. Siano X e Y due v.c. indipendenti:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Costruire la distribuzione congiunta.

SOLUZIONE:

$X \setminus Y$	0	1	2	p_x
-1	$2/15$	$2/15$	$1/15$	$1/3$
0	$4/15$	$4/15$	$2/15$	$2/3$
q_y	$2/5$	$2/5$	$1/5$	1

Dalla tabella si deduce, per esempio, che

$$P(X = 0 \wedge Y = 2) = \frac{2}{15} = p_0 \cdot q_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}$$

In conclusione: nel caso X e Y non siano indipendenti, la distribuzione congiunta va determinata mediante l'analisi di tutti i casi come fatto nell'esempio 1.8.3, altrimenti, se X e Y sono indipendenti, si procede semplicemente con il prodotto delle marginali.

1.10 Funzione di variabile casuale doppia

Date due variabili casuali X e Y definite sullo stesso universo, è possibile considerare la v.c *semplice*: $Z = g(X, Y)$ ottenuta considerando tutte le coppie X_i e Y_j che si realizzano con la probabilità congiunta $P_{ij}, \forall\ i, j$. Si noti che la funzione di una v.c. doppia è una v.c. semplice.

Esempio 1.10.1. Data la v.c. doppia X e Y la cui legge congiunta sia data dalla tabella seguente, determinare la v.c semplice $Z = X + Y$.

$X \setminus Y$	-1	0	1	
0	$1/8$	$1/8$	$2/8$	
1	$2/8$	$1/8$	$1/8$	
				1

Tab.1

SOLUZIONE:
Determiniamo i valori che $Z = X + Y$ può assumere:

$\forall\ X, Y$

$\bigoplus$	-1	0	1	
0	-1	0	1	
1	0	1	2	

Tab.2

Tali valori sono le determinazioni della v.c. Z che scriviamo:

$$Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Dove:

- $P(z = -1) = \frac{1}{8}$ si trova osservando il corrispondente valore della congiunta nella tabella Tab.1 quando $X = 0$ e $Y = -1$.

- $P(Z = 0) = \frac{3}{8}$ analogamente quando $X = 0$ e $Y = 0$ oppure $X = 1$ e $Y = -1$. Le due probabilità congiunte $\frac{1}{8}$ e $\frac{2}{8}$ vanno ovviamente sommate.
- $P(Z = 1) = \frac{3}{8}$ ottenuto sommando le congiunte $\frac{2}{8}$ e $\frac{1}{8}$ relative alle coppie $X = 0$ e $Y = 1$ oppure $X = 1$ e $Y = 0$.
- $P(Z = 2)$ ottenuto osservando il caso $X = 1$ e $Y = 1$ con probabilità congiunta $\frac{1}{8}$.

Per osservare più agevolmente i valori di Z, fondiamo le due tabelle Tab.1 e Tab.2 nella seguente:

$\bigoplus$ $X \setminus Y$	-1	0	1	
0	-1 $\frac{1}{8}$	0 $\frac{1}{8}$	1 $\frac{2}{8}$	
1	0 $\frac{2}{8}$	1 $\frac{1}{8}$	2 $\frac{1}{8}$	

In ogni casella: in alto a sinistra si è calcolato il valore della somma Z; in basso a destra si è riportato il valore della probabilità congiunta.

Facilmente si ricava:

$$Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

dove, per esempio $\frac{2}{8}$, è ottenuto sommando le congiunte delle due caselle dove compare 0 nella somma in alto a sinistra.

Esercizio 1.10.1. Determinare le v.c. semplici

$$T = 2X - Y \qquad W = X \cdot Y \qquad S = X - Y$$

Si tenga presente la funzione prodotto W perché avrà un ruolo importante nel successivo calcolo degli indici delle v.c. doppie.

1.11 Indici di variabili casuali doppie

Anche per le variabili doppie è possibile definire alcuni parametri numerici che le caratterizzano in maniera sintetica.

1.11.1 Baricentro

Definizione 1.11.1. Data una v.c. doppia (X, Y), si definisce *baricentro* di (X, Y) la coppia di numeri:

$$BAR(X, Y) = (E(X), E(Y))$$

ove $E(X)$, $E(Y)$ sono i rispettivi valori medi delle v.c. X e Y.

Qualora le coppie (x_i, y_j) venissero rappresentate in un piano cartesiano $x0y$, il $BAR(X, Y)$ ne rappresenterebbe proprio il baricentro geometrico.

1.11.2 Covarianza

Questo indice misura la varianza congiunta delle due variabili. Essa è definita attraverso il valor medio del prodotto di tutti i possibili scarti che X e Y definiscono rispetto ai loro valori medi $E(X)$ e $E(Y)$:

Definizione 1.11.2. Si definisce *covarianza* delle due v.c. X e Y il numero:

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))]$$

$Cov(X, Y)$ è un numero reale che può essere positivo, negativo o nullo e si calcola solamente conoscendo la distribuzione *congiunta*; il $BAR(X, Y)$ invece si determina anche senza questo dato.

Per come è stato definito, si intuisce che $Cov(X, Y)$ è complesso da calcolare, tuttavia, sviluppando la sua formula, si ottiene:

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

che risulta notevolmente più semplice. Infatti: $E(X)$ e $E(Y)$ sono i valori medi delle v.c. semplici X e Y, mentre $E(XY)$ è il valor medio della funzione di v.c. doppia $W = X \cdot Y$, come già detto nel capitolo precedente.

Esempio 1.11.1. Determinare $BAR(X, Y)$ e $Cov(X, Y)$ della v.c. doppia dell'esempio 1.10.1 Tab.1.

$X \setminus Y$	-1	0	1	P_x
0	1/8	1/8	2/8	4/8
1	2/8	1/8	1/8	4/8
q_y	3/8	2/8	3/8	1

Tab.1

SOLUZIONE:

Per determinare $BAR(X, Y) = (E(X), E(Y))$ e $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$ conviene calcolare prima i singoli valori medi $E(X)$e $E(Y)$. Sommiamo per righe e colonne le congiunte della TAB.1 ottenendo:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{8} & \frac{4}{8} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

da cui: $E(X) = \dfrac{4}{8}$ e $E(Y) = \dfrac{-3+3}{8} = 0$

Per determinare $E(XY)$ dobbiamo prima valutare la v.c. $W = X \cdot Y$ nel seguente modo:

$\odot$ $X \setminus Y$	-1	0	1
0	0 ; $\frac{1}{8}$	0 ; $\frac{1}{8}$	0 ; $\frac{2}{8}$
1	-1 ; $\frac{2}{8}$	0 ; $\frac{1}{8}$	1 ; $\frac{1}{8}$

da cui $W = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

e quindi $E(W) = \dfrac{-2+0+1}{8} = -\dfrac{1}{8}$.

$$\text{Gli indici statistici richiesti sono: } BAR(X,Y) = \left(\frac{4}{8}; 0\right) = \left(\frac{1}{2}; 0\right)$$
$$COV(X,Y) = -\frac{1}{8} - \frac{4}{8} \cdot 0 = -\frac{1}{8}$$

Dall'espressione della $COV(X,Y)$ risulta che essa è sensibile alle variazioni di X e Y rispetto ai loro valori medi. Se le variazioni di X e Y sono concordi allora $COV(X,Y)$ è positiva, altrimenti è negativa. Se il segno delle variazioni è vario, allora la $COV(X,Y)$ può essere nulla.

Concludiamo con un importante *teorema*:

Teorema 1.11.1. *Se X e Y sono stocasticamente indipendenti allora* $COV(X,Y)) = 0$

Dimostrazione. Se X e Y sono indipendenti allora

$$P(X = x_i \wedge Y = y_j) = p_i \cdot q_j$$

quindi

$$E(X \cdot Y) = \sum_{i,j} x_i y_i p_{ij} = \sum x_i y_j p_i q_j = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \cdot \sum_{j01}^{m} y_j q_j = E(X)E(Y)$$

pertanto

$$COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

□

Si osservi che, in caso di indipendenza, il valor medio del prodotto è uguale al prodotto dei valori medi.

L'inverso del teorema non vale: infatti se $COV(X, Y) = 0$, non è detto che X e Y siano indipendenti. Per valutare l'indipendenza bisogna verificare che $p_{ij} = p_i q_j \; \forall \, i, j$. Naturalmente, se $COV(X, Y) \neq 0$ allora X e Y sono sicuramente *dipendenti*; se $COV(X, Y) = 0$ allora nulla si può dire circa *l'indipendenza*.

Esempio 1.11.2. Si consideri la variabile

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e la funzione

$$Y = X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Studiare la coppia (X, Y), determinare gli indici $BAR(X, Y)$ e $COV(X, Y)$ e dire se X e Y sono indipendenti.

SOLUZIONE:

Compiliamo la tabella della congiunta, dopo aver inserito le marginali p_x e q_y

$X \setminus X^2$	0	1	P_x
-1	0	1/3	1/3
0	1/3	0	1/3
1	0	1/3	1/3
q_y	1/3	2/3	1

si noti che

$$P(x = -1 \wedge x^2 = 0) = 0$$

perché è impossibile che $(-1)^2 = 0$; da cui, per differenza,

$$P(x = -1 \wedge x^2 = 0) = 0 \neq \frac{1}{3}\frac{1}{3}$$

e quindi X e X^2 non sono indipendenti. Ciò è del tutto ovvio perché X e X^2 sono legate da una funzione matematica (il quadrato) e pertanto X^2 è *dipendente* da X.

Calcoliamo ora la $COV(X, X^2)$. Allo scopo serve calcolare $E(X \cdot X^2)$ utilizzando la tabella:

⊙ $X \setminus X^2$	0	1	
-1	0 0	0 $\frac{1}{3}$	
0	0 $\frac{1}{3}$	0 0	
1	0 0	1 $\frac{1}{3}$	
			1

da cui si ricava

$$X \cdot X^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{con } E(XX^2) = 0$$

e quindi:

$$COV(X, X^2) = E(X \cdot X^2) - E(X)E(X^2) = 0 - 0 \cdot \frac{2}{3} = 0$$

Conclusioni: X e X^2 sono variabili dipendenti, ma la loro covarianza è nulla. L'esercizio costitusce un controesempio per l'inverso del teorema esposto sopra.

1.11.3 Proprietà di linearità

Anche nel caso di variabili doppie è utile trattare funzioni lineari del tipo $Z = aX + bY + c$. Gli indici studiati si comportano così:

- $E(Z) = E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$
- $\sigma^2(Z) = a^2\sigma^2(X) + b^2\sigma^2(Y) + 2ab\,COV(X, Y)$

Se X e Y sono indipendenti allora risulta

$$\sigma^2(Z) = a^2\sigma^2(X) + b^2\sigma^2(Y) \quad \text{poiché}$$
$$COV(X, Y) = 0$$

Nel caso semplice e frequente di una somma di variabili $X + Y$ si ha:

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2COV(X, Y)$

Quest'ultima si semplifica in:

$$\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) \qquad \text{in caso di indipendenza stocastica.}$$

1.11.4 Esercizi

Esercizio 1.11.1. Siano X e Y due v.c. Determinare, nei seguenti due casi, il valore del parametro a in modo che le tabelle rappresentino distribuzione di probabilità congiunta. Successivamente ricavare le distribuzioni marginali di X e Y e determinare:

$$E(X) \quad E(Y) \quad \sigma^2(X) \quad \sigma^2(Y) \quad BAR(X,Y) \quad COV(X,Y)$$

Infine valutare l'indipendenza di X e Y.

- Caso 1.

$X \setminus Y$	0	1	
-1	$\frac{2}{5}a$	$\frac{1}{5}a$	
2	$\frac{1}{5}a$	$\frac{3}{5}a$	

- Caso 2.

$X \setminus Y$	-1	0	1	
0	a	$3a$	$2a$	
1	a	$2a$	$7a$	

Esercizio 1.11.2. Data la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y:

$X \setminus Y$	0	1	2	
0	a	$3a$	$2a$	
1	$2a$	$6a$	$4a$	

Determinare il parametro a in modo che X e Y siano indipendenti. Determinare anche $Z = max(X,Y)$ e $W = X + Y$.

Esercizio 1.11.3. Sono date la v.c. X e Y indipendenti tra loro:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Determinare:

- la coppia (X,Y)
- le variabili $Z = X + Y$; $P = XY$; $W = X - Y$
- i principali indici della coppia (X,Y) e delle variabili Z, P e W.

Esercizio 1.11.4. Nel lancio di un dado, sia Y la v.c. che assume valore 0 se esce 1 o 2 e valore 1 negli altri casi. Sia poi X la v.c. che assume valore 0 se esce un pari, 1 altrimenti.

- Costruire la distribuzione di probabilità congiunta della coppia (X, Y)
- Calcolare $BAR(X, Y)$ e $COV(X, Y)$
- Valutare l'indipendenza.

Esercizio 1.11.5. Da un mazzo di 40 carte si effettua un'estrazione a blocco di due carte. Sia X la v.c. uguale al numero di carte di cuori estratte e Y la v.c. uguale al numero degli assi estratti.

- Costruire la v.c. doppia (X, Y)
- Calcolare gli indici
- Valutare l'indipendenza.

Esercizio 1.11.6. In un'urna ci sono 3 gettoni contrassegnati dai numeri 0, 1, 3. Si eseguono estrazioni bernoulliane (con rimessa) di due gettoni e si studiano le seguenti variabili:

- T = valore assoluto della differenza delle due cifre estratte
- W = resto della divisione per 2 dei valori assoluti della variabile T

Si chiede di:

- Costruire la v.c. doppia (T, W)
- Valutare l'indipendenza
- Calcolare gli indici $BAR(T, W)$ e $COV(T, W)$

Capitolo 2

Modelli discreti classici

Come si è visto, i fenomeni aleatori possono essere descritti da una variabile casuale. Conviene allora studiare quelle variabili casuali che sono di uso frequente e che costituiscono dei modelli discreti di riferimento.

Di fronte a un fenomeno specifico, l'esame, la classificazione e l'ossservazione, ci riconducono ad uno dei modelli noti e a quelle regolarità che caratterizzano ciascuno di essi. Studieremo i seguenti modelli:

- booleano (o distribuzione indicatrice o di Bernoulli)
- uniforme (o distribuzione uniforme discreta)
- binomiale (o distribuzione delle prove ripetute)
- di Poisson (o distribuzione degli eventi rari)

Per ogni modello classico indicheremo: la definizione, la struttura della v.c., i principali indici ed eventualmente il grafico della distribuzione. Questi aspetti caratterizzeranno il modello e costituiranno un riferimento per lo studio dei fenomeni aleatori che si dovranno affrontare.

2.1 Modello booleano o di Bernoulli

Questo modello descrive fenomeni dicotomici, cioè fenomeni aleatori che hanno solo due modi d'essere. Per esempio sono dicotomici i fenomeni:

- esito del lancio di una moneta (Testa - Croce)
- stato di un sistema (acceso - spento / on - off)
- valore di verità di una proposizione (vero - falso)
- presenza di una caratteristica (si - no)

e innumerevoli altri fenomeni con i quali abbiamo a che fare quotidianamente.
Il modello booleano si caratterizza così:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} \qquad \forall\, p, q \quad \text{e} \qquad \begin{aligned} 0 \leq & p \leq 1 \\ 0 \leq & q \leq 1 \\ p+&q = 1 \end{aligned}$$

I valori 0 e 1 vengono associati ai due modi d'essere che caratterizzano il fenomeno.

Esempio 2.1.1. Una moneta truccata presenta testa nel 40% dei casi. Descrivere il modello associato alla moneta.

Posto che, per esempio, testa venga associata a 1, si ha:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Esempio 2.1.2. Da una statistica risulta che in una mattina qualsiasi di dicembre il 75% delle aule scolastiche ha le luci accese. Determinare il modello che descrive lo stato di accensione della luce.

Associamo 1 a "luce accesa" ottenendo:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

Esempio 2.1.3. Il personale di un'azienda è composto da 24 femmine e 16 maschi. Descrivere la v.c.: sesso del dipendente dell'azienda. Associamo 1 a "maschio":

$$I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{24}{40} & \frac{16}{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Generalmente si associa il valore 1 alla caratteristica che è oggetto di studio o interesse ma si tratta di una convenzione.

2.1.1 Indici di una v.c. booleana

Data

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

si ha:

$$E(I) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p \quad \text{e } \sigma^2(I) = E(I^2) - E^2(I) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

poichè

$$I^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} = I$$

La moda di una booleana corrisponde a 0 oppure 1 in base al maggior valore delle rispettive probabilità; non è un indice particolarmente significativo in quanto ci sono solo due valori da confrontare.

In riferimento agli esempi precedenti:

$$\begin{aligned} E(I_1) &= 0.4 & \sigma^2(I_1) &= 0.4 \cdot 0.6 = 0.24 \\ E(I_2) &= 0.75 & \sigma^2(I_2) &= 0.75 \cdot 0.25 = 0.188 \\ E(I_3) &= \frac{2}{5} = 0.40 & \sigma^2(I_3) &= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25} = 0.24 \end{aligned}$$

2.2 Modello uniforme

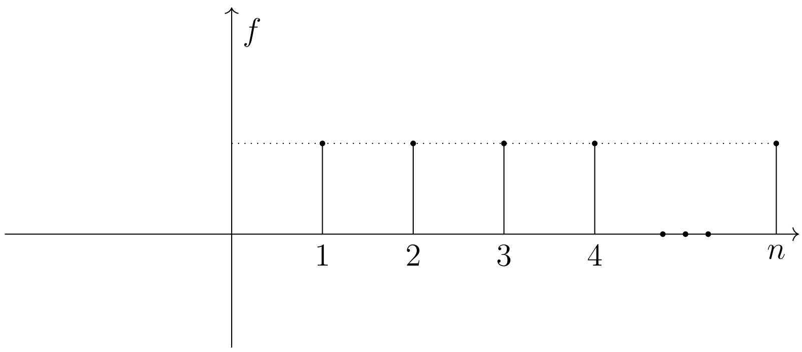
Questo modello descrive fenomeni aleatori in cui i casi sono equiprobabili, cioè presentano tutti la stessa probabilità. Il modello uniforme si caratterizza così:

$$X = U(n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & i & \cdots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

con $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$

ove n è il numero delle determinazioni della v.c. e U sta per *uniforme*.

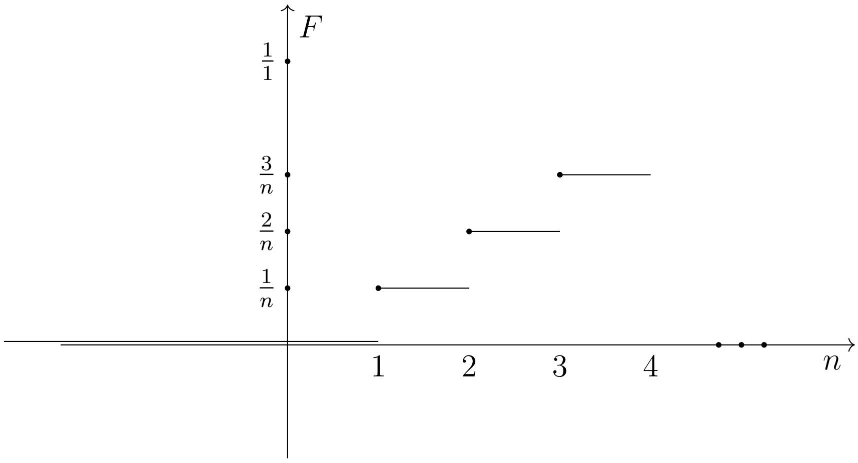
Il grafico della distribuzione è evidentemente:



La funzione di ripartizione è:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 1, \\ \frac{1}{n} & \text{per } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{n} & \text{per } 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \\ 1 & \text{per } x > n. \end{cases}$$

il cui grafico presenta un'evidente regolarità:



2.2.1 Indici di una v.c. uniforme

- la moda non è significativa poiché i valori presentano tutti la stessa probabilità
- il valor medio è:

$$E(X) = E(U(n)) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i \stackrel{[1]}{=} \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

- la varianza è:

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} i^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 \stackrel{[2]}{=} \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

  da cui

$$\sigma^2(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

Esempio 2.2.1. Descrivere il modello del lancio di un dado regolare.
SVOLGIMENTO: com'è noto, un dado regolare presenta 6 facce

$$U(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$E(U(6)) = \frac{n+1}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$\sigma^2(U(6)) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{35}{12} = 2.92$$

[1]Ricordando che $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
[2]Ricordando che $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Esempio 2.2.2. Un'urna contiene 30 palline numerate da 1 a 30. Descrivere la v.c. X: numero estratto dall'urna. Descrivere anche le v.c. $X+1$ e $2X-3$.

SVOLGIMENTO: supponendo che l'urna non sia truccata, si ha:

$$X = U(30) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 30 \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \cdots & \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

$$E(U(30)) = 15.5 \qquad \sigma^2(U(30)) = 74.92$$

$$X+1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & 31 \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \cdots & \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

Per il calcolo di $E(X+1)$ ricordiamo la proprietà di linearità:

$$E(X+1) = E(X)+1 = 15.5+1 = 16.5 \qquad \sigma^2(X+1) = \sigma^2(X) = 74.92$$

$$2X-3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 & 7 & \cdots & 57 \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \cdots & \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

$$E(2X-3) = 2\cdot E(X)-3 = 2\cdot 15.5-3 = 28 \qquad \sigma^2(2X-3) = 4\cdot\sigma^2(X) = 4\cdot 74.92 = 299.68$$

Esempio 2.2.3. Determinare la probabilità che una v.c. uniforme assuma valori superiori a 10 sapendo che il suo valor medio è 8.

SVOLGIMENTO: sapendo che il valor medio $E(X) = \frac{n+1}{2} = 8$ si ricava $n = 15$ e quindi

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 15 \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \cdots & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

e poi

$$p(x > 10) = \frac{5}{15}$$

Esempio 2.2.4. Si consideri la v.c. X che descrive una moneta truccata in cui testa esce un terzo delle volte e la v.c. Y che descrive un dado regolare. Determinare la v.c. doppia (X,Y) e i suoi principali indici.

SVOLGIMENTO: poiché la moneta e il dado determinano due fenomeni indipendenti, la costruzione della distribuzione congiunta è semplificata:

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j \quad \text{ove } p_i \text{ è la distribuzione di } X \text{ e } q_j \text{ è quella di } Y$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

la tabella della distribuzione congiunta è data da:

$X \setminus Y$	1	2	3	4	5	6	
0	0 $\frac{2}{18}$	0 $\frac{2}{18}$	0 $\frac{2}{18}$	0 $\frac{2}{18}$	0 $\frac{2}{18}$	0 $\frac{2}{18}$	$\frac{2}{3}$
1	1 $\frac{1}{18}$	2 $\frac{1}{18}$	3 $\frac{1}{18}$	4 $\frac{1}{18}$	5 $\frac{1}{18}$	6 $\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

ottenuta moltiplicando le probabilità marginali.

$$BAR(X,Y) = (E(X), E(Y)) = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{2}\right)$$

$$COV(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{1+2+3+4+5+6}{18} - \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} = 0$$

dove $E(XY)$ è stato calcolato sfruttando lo spazio nella tabella per determinare i prodotti $x_i \cdot y_j$. La covarianza nulla era attesa perché le v.c X e Y sono indipendenti.

2.3 Modello binomiale

Questo modello descrive il numero di successi in una sequenza di prove ripetute indipendenti e dicotomiche. Per esempio, sono binomiali le seguenti variabili:

- il numero di centri ottenuti lanciando 10 volte una freccetta verso un bersaglio
- il numero di pezzi difettosi in un campione di pezzi prodotti da una azienda
- il numero di volte che esce un 5 lanciando 15 volte un dado
- il numero di cavie che assumono un certo comportamento in un campione di 8
- il numero di croci che escono lanciando 100 volte una moneta regolare

Poiché ciascuna prova è dicotomica, essa può essere rappresentata da una v.c. booleana o di Bernoulli:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

ove "1" " rappresenta il successo della prova che avviene con probabilità p e "0" rappresenta l'insuccesso della prova che avviene con probabilità q.

Possiamo quindi pensare che la sequenza di prove ripetute indipendenti sia equivalente alla sequenza di v.c. booleane e, allo stesso modo, contare il numero di successi nella sequenza di prove è equivalente a contare quante volte compare "1" nella sequenza della v.c. booleana.

Indichiamo una binomiale con il simbolo:

$$b(n, p, x)$$

dove:

- n è il numero di prove indipendenti
- p è la probabilità di successo in ciascuna prova
- x è il numero (variabile) di successi

Costruiamo la struttura della $b(n, p, x)$ pensando che *sia la somma di n v.c. booleane indipendenti di parametro p.*

Consideriamo il caso più semplice: $n = 2$

$$b(2, p, x) = I_1 + I_2 \quad \text{ove } I_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} \text{ indipendenti}$$

Costruiamo la tabella doppia:

$I_1 + I_2$	0	1	I_2
0	0 q^2	1 pq	q
1	1 pq	2 p^2	p
I_1	q	p	1

facilmente compilabile data l'indipendenza di I_1 e I_2

da cui si ricava:

$$b(2, p, x) = I_1 + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \end{pmatrix}$$

Si noti che la distribuzione di probabilità è rappresentata dai termini dello sviluppo *binomiale* $(q + p)^2$.

Proviamo ora il caso $n = 3$.

$$b(3, p, x) = (I_1 + I_2) + I_3 \quad \text{ove } I_1 + I_2 \text{ è appena stata calcolata e } I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

$I_1 + I_2 + I_3$	0	1	2	I_3
0	0 q^3	1 $2pq$	2 p^2q	q
1	1 pq^2	2 $2p^2q$	3 p^3	p
$I_1 + I_2$	q^2	$2pq$	p^2	

Da cui si ricava:

$$b(3,p,x) = I_1 + I_2 + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ q^3 & 2q^2p & 2p^2q & p^3 \end{pmatrix}$$

i termini della distribuzione rappresentano lo sviluppo di $(q+p)^3$.
Per induzione, si può ipotizzare che:

$$b(n,p,x) = \sum_{k=1}^{n} I_k \quad \text{con } I_k \text{ indipendenti}$$

e, sempre per induzione, si ottiene la seguente struttura:

$$b(n,p,x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & x & \cdots & n \\ q^n & \binom{n}{1}q^{n-1}p & \cdots & \binom{n}{x}p^x q^{n-x} & \cdots & p^n \end{pmatrix}$$

ove si riconoscono i termini dello sviluppo della potenza ennesima del binomio (o formula del binomio di Newton) $(q+p)^n$, da cui il nome assegnato alla v.c. (binomiale). In base alla formula del binomio è facile verificare che la somma dei termini è 1:

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

e quindi i termini rappresentano veramente una distribuzione di probabilità.

Osservazione. Il coefficiente $\binom{n}{x}$ può essere interpretato in senso combinatoriale come il numero di modi di scegliere x variabili che determinano il successo, fra n variabili.

Esempio 2.3.1. Data una v.c. $b(10, \frac{1}{4}, x)$ calcolare:

a. la probabilità di avere 3 successi

b. la probabilità di ottenere tutti successi

c. la probabilità di avere almeno 8 successi

d. la probabilità di avere almeno un successo

Svolgimento: sinteticamente, la probabilità si può descrivere così:

$$P(X) = \binom{10}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{10-x}$$

da cui:

a.

$$P(x=3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{3^7}{4^{10}} = 0.25$$

b.

$$P(x=10)=\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=0.00000095$$

c.

$$P(x\geq 8)=p(x=8)+p(x=9)+p(x=10)=\sum_{x=8}^{10}\binom{10}{X}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x}=$$

$$=\binom{10}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}+\binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=$$

$$=\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}\cdot\frac{3^2}{4^{10}}+10\cdot\frac{3}{4^{10}}+\frac{1}{4^{10}}=\frac{1}{4^{10}}(405+30+1)=436\cdot\frac{1}{4^{10}}=0.0004142$$

d.

$$P(x\geq 1)=\sum_{x=1}^{10}\binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-x}$$

l'espressione è complessa quindi meglio ragionare sull'evento negato:

$$P(x\geq 1)=1-P(x=0)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}=0.9437$$

Ricordiamo che, in generale, la *la probabilità di avere almeno un successo* è $(1-q^n)$.

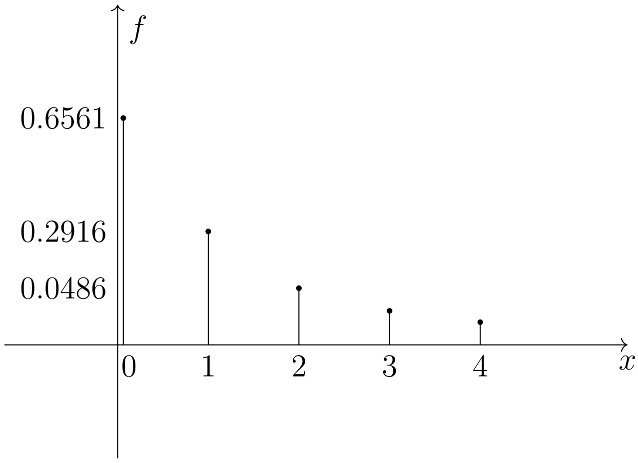
Il grafico della distribuzione binomiale assume una forma che dipende dai valori dei parametri p e q. Per esempio:

- $p<q$ con $n=4$ e $p=\frac{1}{10}$ si ha:

$$b(4,\frac{1}{10},x)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ \left(\frac{9}{10}\right)^4 & \binom{4}{1}\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^3 & \cdots & \cdots & \left(\frac{1}{10}\right)^4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0.6561 & 0.2916 & 0.0486 & 0.0036 & 0.0001\end{pmatrix}$$

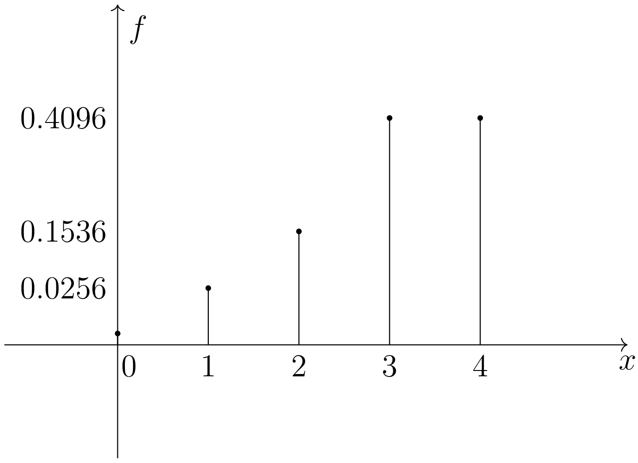
Con $p < q$ si osserva che il grafico presenta una evidente asimmetria con una moda molto anticipata e la *coda* a destra.



- $p > q$ con $n = 4$ e $p = 0.8$ si ha:

$$b(4, 0.8, x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.0016 & 0.0256 & 0.1536 & 0.4096 & 0.4096 \end{pmatrix}$$

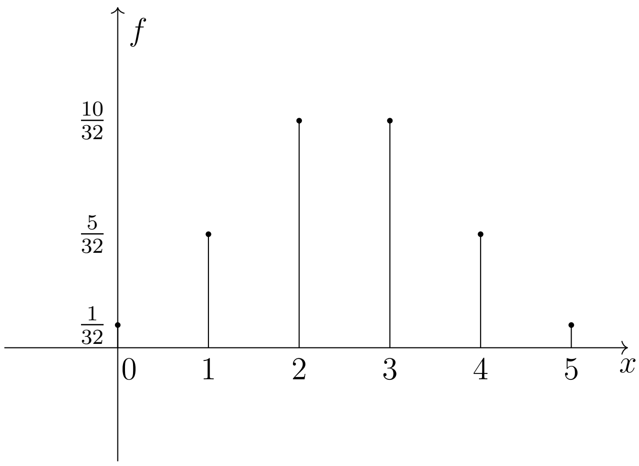
Con $p > q$ si osserva che il grafico risulta ancora asimmetrico ma con due mode posticipate e la *coda* a sinistra.



- $p = q$ con $n = 5$ e $p = q = 0.5$ si ha:

$$b(4, 0.5, x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{32} & \frac{5}{32} & \frac{10}{32} & \frac{10}{32} & \frac{5}{32} & \frac{1}{32} \end{pmatrix}$$

Con $p = q$ si osserva che il grafico presenta un'evidente simmetria rispetto alla moda (2 in questo caso) posizionata al centro.



2.3.1 Indici di una v.c. binomiale

Riguardo agli indici, possiamo dire che:

- Il valor medio della v.c. binomiale risulta:

$$E(b) = E(x) = np$$

cioè il prodotto del numero delle prove con la probabilità di successo di ogni singola prova.

Dimostrazione. Supponiamo che $b(n, p, x) = \sum_{k=1}^{n} I_k$ con I_k indipendenti; allora

$$E(b) = E\left(\sum_{k=1}^{n} I_k\right) \overset{3}{=} \sum_{k=1}^{n} E\left(I_k\right) \overset{4}{=} \sum_{k=1}^{n} p = np$$

□

Si noti che il valor medio cresce in maniera proprorzionale a n. Risulta quindi che $E(b) = np$ il cui significato è: *numero medio di successi* in una sequenza di n prove ripetute dicotomiche e indipendenti.

- La moda, o valore modale, di una v.c. binomiale riveste una notevole importanza perché corrisponde al *numero più probabile di successi* in una sequenza di n prove ripetute dicotomiche e indipendenti. La moda si indica con $\hat{X}$ oppure con $Mo(b)$ o

[3] Proprietà di linearità

[4] $E(I_k) = p$ dato che $I_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$

con $Mo(X)$ e si può dimostrare che corrisponde al valore intero (o ai valori interi) contenuti nel seguente intervallo

$$np - q \leq \hat{X} \leq np + p$$

detto *intervallo modale*. Poiché tale intervallo ha sempre grandezza unitaria: ampiezza= $(np + p) - (np - q) = p + q = 1$, è ovvio che le mode di una binomiale possono essere al massimo 2. Pertanto una v.c. binomiale può essere solo unimodale o bimodale (vedi i grafici precedenti). Si osservi che la moda $\hat{X}$ è l'intero più vicino al valor medio $E(b)$.

- La varianza della v.c. binomiale risulta essere:

$$\sigma^2(b) = \sigma^2(X) = npq$$

cioè il prodotto dei tre parametri fondamentali della binomiale.

Dimostrazione. Sappiamo che $b(n, p, x) = \sum_{k=1}^{n} I_k$ con I_k indipendenti, quindi:

$$\sigma^2(b) = \sigma^2\left(\sum_{k=1}^{n} I_k\right) =^{5} \sum_{k=1}^{n} \sigma^2(I_{k)} =^{6} = \sum_{k=1}^{n} pq = npq$$

□

Siccome risulta $0 < q < 1$ allora si ha che $\sigma^2(b) = npq < np = E(b)$ cioè la varianza è sempre minore del valor medio e il loro rapporto è q, la probabilità dell'insuccesso.

2.3.2 Esercizi

Esercizio 2.3.1. Il 20% degli studenti del Volterra usa il treno per raggiungere la scuola. Scelto un gruppo di 6 studenti, determinare:

- La distribuzione di probabilità del numero di studenti del gruppo che usa il treno.
- la probabilità che più della metà usino il treno.
- il numero medio di studenti che usano il treno.
- il numero più probabile di studenti che usano il treno.
- la deviazione standard del numero di studenti che usano il treno.

[5] I_k indipendenti $\Longrightarrow$ covarianza nulla.

[6] $\sigma^2(I_k) = pq$ dato che $I_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$

Esercizio 2.3.2. In una ditta vi sono 10 macchine utensili in funzione; la possibilità che, durante una giornata, una macchina si guasti è $0,1$. Supposto che le macchine lavorino in modo indipendente, determinare:

- la probabilità che non si guasti alcuna macchina
- la probabilità che ne rimanga in funzione almeno una
- il numero medio, il numero più probabile e la deviazione standard del numero di macchine guaste
- la probabilità che siano in funzione un numero di macchine compreso tra ...

Esercizio 2.3.3. Una compagnia di assicurazioni stima che il 2% dei sinistri automobilistici avvenga per avverse condizioni atmosferiche. Valutare, sui prossimi 20 incidenti, la probabilità che:

- nessuno sia dovuto a tali circostanze
- almeno uno sia dovuto a tali circostanze
- al massimo 3 incidenti siano dovuti a tali circostanze.

Esercizio 2.3.4. Il 65% degli studenti di un corso di laurea non è in regola con gli esami. Intervistando un campione di 9 studenti, dire con quale probabilità la maggior parte di essi risulta in regola. Determinare anche il numero medio e il numero più probabile di studenti regolari (in ordine con gli esami).

Esercizio 2.3.5. Una squadra di volley ha probabilità del 70% di vincere le gare del suo campionato. Considerando le prossime 5 gare, tutte indipendenti le une dalle altre, valutare la probabilità di:

- vincere 3 gare
- vincere almeno 3 gare
- vincere le prime 3 gare
- vincere al massimo 3 gare
- vincere tutte le gare.

2.4 Modello di Poisson

E' un caso particolare del modello binomiale. Infatti descrive il numero di successi in una sequenza di n prove indipendenti e dicotomiche con le ulteriori condizioni che il numero di prove sia elevato ($n \to +\infty$), la probabilità di successo sia molto piccola ($p \to 0$) e il prodotto np sia una quantità finita; tale quantità sarà indicata con λ. Dato che p è piccola, questo modello è noto anche come *distribuzione degli eventi rari*.

Per esempio, sono poissoniani i seguenti fenomeni aleatori:

- il numero dei pezzzi difettosi in un lotto *molto grande* di pezzi prodotti da un'azienda
- il numero di incidenti sul lavoro avvenuti in una certa azienda in un dato periodo di tempo
- il numero di persone colpite da una certa malattia in una popolazione di riferimento
- il numero di errori di stampa contenuti nella prima stesura di un libro

Importanti fenomeni di fisica, quali il decadimento radiattivo o la presenza di malattie rare in medicina o anche le file d'attesa seguono il modello di Poisson.

Per costruire la struttura della v.c. di Poisson ricordiamo che è un caso particolare della binomiale, per $n \to +\infty$ e $p \to 0$ con $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty\\ p\to 0}} np = \lambda$ dove $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Indichiamo la variabile con il simbolo:

$$
\begin{array}{ll}
P(\lambda, x) & \text{dove } x \text{ è il numero di successi (variabile)} \\
& \qquad \lambda \text{ si ottiene da:} \\
& \qquad n: \ \text{numero delle prove indipendenti (molto grande)} \\
& \qquad p: \ \text{probabilità del successo (molto piccola)}
\end{array}
$$

ottenendo:

$$
P(\lambda, x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ p(x=0) & p(x=1) & p(x=2) & p(x=3) & \cdots & p(x=n) & \cdots \end{pmatrix}
$$

dove le $p(x)$ sono da determinare così:

$$
p(x) = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ p\to 0}} b(n,p,x) = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ p\to 0}} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}
$$

ricordando che $q = 1 - p$ e $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}} np = \lambda$, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
p(x) = \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \\
= \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)\cancel{(n-x)!}}{x!\cancel{(n-x)!}} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = \\
= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

poichè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{n^x} = 1$$

in quanto numeratore e denominatore sono entrambi di grado x.

Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = 1$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda} \quad \text{variante del limite fondamentale} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

Quindi la variabile casuale di Poisson ha come distribuzione di probabilità

$$\frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

e si può allora scrivere:

$$P(\lambda, x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & x & \cdots \\ e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} & \cdots & \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \cdots \end{pmatrix}$$

Si può dimostrare (utilizzando la teoria delle serie numeriche) che:

$$\sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

e quindi i termini formano *davvero* una distribuzione di probabilità.

Per quanto concerne il grafico della distribuzione di Poisson, mutuando quello della binomiale con $p < q$, otteniamo una rappresentazione fortemente asimmetrica, con una pronunciata *coda* a destra e moda anticipata.

Esempio 2.4.1. Tracciare il grafico della v.c. di Poisson:

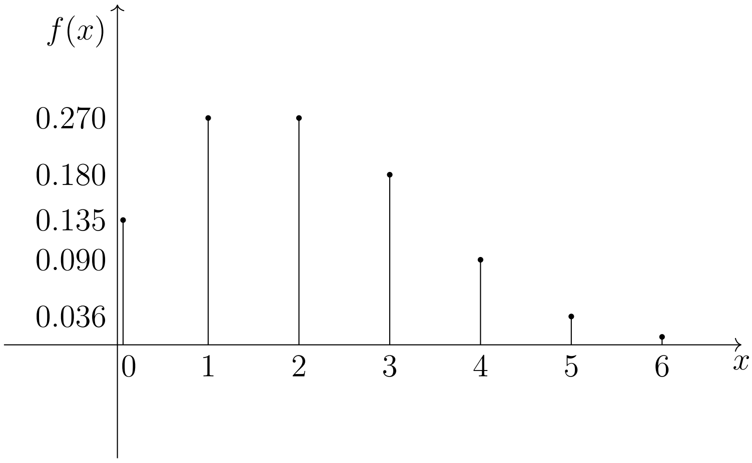
$$P(2, x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ p(x=0) & p(x=1) & p(x=2) & p(x=3) & \cdots & p(x=n) & \cdots \end{pmatrix}$$

Svolgimento: poichè

$$P(2,x) = \frac{2^x}{x!} e^{-2}$$

si ottiene:

$$P(2,x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ 0.135 & 0.270 & 0.270 & 0.180 & 0.090 & 0.036 & 0.012 & \cdots \end{pmatrix}$$



La forma del grafico conferma la definizione di *distribuzione degli eventi rari*: infatti, al crescere di x, la probabilità è sempre minore perché, essendo *raro* l'evento, è poco probabile che si ripeta molte volte.

Esempio 2.4.2. E' noto che il 2% di bicchieri prodotti da una certa ditta risultano difettosi. Calcolare la probabilità che in un lotto di 200 bicchieri:

a) vi sia solo un bicchiere difettoso

b) più di 3 bicchieri siano difettosi

c) nessun bicchiere sia difettoso

Svolgimento:
$n = 200; \quad p = 0.02; \quad \Rightarrow \lambda = 200 \cdot 0.02 = 4$

$$P(2,x) = \frac{2^x}{x!} e^{-2}$$

si ottiene:

$$P(4,x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & x & \cdots \\ e^{-4} & 4e^{-4} & 8e^{-4} & \cdots & \frac{4^x e^{-4}}{x!} & \cdots \end{pmatrix}$$

a) $x = 1 \quad \Rightarrow P(x=1) = 4e^{-4} = \boxed{0.073}$

b) $x > 3 \quad \Rightarrow P(x > 3) = 1-[P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)] = 1-[e^{-4} + 4e^{-4} + 8e^{-4}] = 1 - 13e^{-4} = \boxed{0.762}$

c) $x = 0 \quad \Rightarrow P(x = 0) = e^{-4} = \boxed{0.018}$

Osservazione. Avremmo potuto svolgere l'esempio 2.4.1 anche utilizzando il modello binomiale:

$$n = 200; \quad p = 0.02; \qquad b(200, 0.02, x) = \binom{200}{x}(0.02)^x(0.98)^{200-x}$$

ma risulta evidente la difficoltà del calcolo del coefficiente binomiale $\binom{200}{x}$ e delle altre potenze. Possiamo dire che il modello poissoniano e quello binomiale hanno un *buon accordo* quando

$$p \leq \frac{1}{10} \text{ e } \lambda \leq 5 \quad \text{ovvero} \quad p \leq \frac{1}{10} \text{ e } n \geq 50$$

e pertanto, in queste condizioni, conviene senz'altro utilizzare il modello di Poisson, più semplice nei calcoli.

Esempio 2.4.3. Una malattia classificata *rara* ha un tasso di incidenza dello 0.15 per mille. Calcolare la probabilità che in una città di 20.000 abitanti vi siano meno di 2 persone che contraggano la malattia.

Svolgimento:
$n = 20000; \quad p = 0.15 \cdot 10^{-3}; \quad \Rightarrow \lambda = 20000 \cdot 0.00015 = 3$

$$x < 3 \quad \Rightarrow P(x < 2) = P(x = 0) + P(x = 1) = e^{-3} + 3e^{-3} = 4e^{-3} = 0.199$$

2.4.1 Indici di una v.c. di Poisson

- **Teorema 2.4.1.** *Il valor medio della v.c. di Poisson risulta:*

  $$E(P) = E(x) = \lambda$$

  cioè proprio il parametro che compare nella definizione

  $$P(x = x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

  Dimostrazione. Sappiamo che nel csao binomiale si ha:

  $$E(b) = np$$

e partanto, essendo la v.c. di Poisson un caso particolare della binomiale stessa, si ottiene:

$$E(P) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}} E(b) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}} np = \lambda$$

□

La distribuzione di Poisson è partanto completamente determinata dal valore di λ inteso come valor medio della variabile, cioè come *numero medio di successi.*

Esempio 2.4.4. Nella stesura di un testo in formato WORD, una professionista afferma di compiere mediamente due errori per pagina. Calcolare la probabilità di trovare 3 errori in una pagina scelta a caso.

SVOLGIMENTO:

Si può pensare che la presenza di errori in una pagina sia un evento ragionevolmente raro. Pensiamo quindi che il numero x sia una v.c. di Poisson di media $\lambda = 2$ e distribuzione

$$P(x = x) = \frac{2^x}{x!} e^{-2}$$

La probabilità richiesta è quindi:

$$P(x = 3) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} = \frac{8}{6} e^{-2} = 0.18$$

- La moda, o valore modale, di una v.c. di Poisson corrisponde al numero più probabile di successi in una sequenza molto grande di prove indipendenti e dicotomiche, la cui probabilità di successo sia molto bassa.

  Si indica con $\hat{X}$ oppure $Mo(P)$ o $Mo(X)$ e si ottiene come caso particolare della binomiale. E' infatti il numero intero contenuto nell'intervallo modale:

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}} (np - q) \leq \hat{X} \leq \lim_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}} (np + p)$$

  cioè

$$\lambda - 1 \leq \hat{X} \leq \lambda + 0 \qquad (\text{ se } p \to 0 \text{ allora } q = 1 - p \text{ che tende a } 1)$$

  Anche nel caso poissoniano l'intervallo modale ha ampiezza $\lambda - (\lambda - 1) = 1$, quindi le mode possono essere al massimo 2 e la distribuzione sarà unimodale o bimodale. In entrambi i casi si dice che le mode sono piuttosto anticipate, perchè è più probabile che vi sia un basso numero di successi piuttosto che il contrario, visto che gli eventi sono rari.

- La varianza della v.c. di Poisson risulta:

$$\sigma^2(P) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}} \sigma^2(b) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}} npq = \lambda \cdot 1 = \lambda$$

Esempio 2.4.5. Determinare gli indici delle v.c. di Poisson trattate nei precedenti esempi.

SVOLGIMENTO:

Esempio 2.4.1

$$P(2,x) \qquad E(P) = \sigma^2 = 2$$
$$\text{intervallo modale } 2 - 1 \leq \hat{X} \leq 2$$
$$\Rightarrow \text{distribuzione bimodale} \qquad \hat{X}_1 = 1 \quad \hat{X}_2 = 2$$

Esempio 2.4.2

$$P(4,x) \qquad E(P) = \sigma^2 = 4$$
$$\hat{X}_1 = 3 \quad \hat{X}_2 = 4$$

cioè il numero medio di bicchieri difettosi in un lotto è 4, mentre il numero più probabile è 3 oppure 4.

Esempio 2.4.3

$$P(3,x) \qquad E(P) = \sigma^2 = 3$$
$$\hat{X}_1 = 2 \quad \hat{X}_2 = 3$$

cioè il numero medio di abitanti colpiti dalla malattia è 3, mentre il numero più probabile è 2 oppure 3.

Esempio 2.4.4

Qui per ipotesi la media degli errori è 2, mentre il numero più probabile è 1 oppure 2.

In tutti gli esempi sin qui trattati la varianza misura il quadrato della variazione media del numero di successi rispetto alla media; la sua radice quadrata, la deviazione standard, misura proprio la variazione media rispetto alla media. Ad esempio, nel caso 2.4.3, $\sigma^2(P) = 3$ significa che $\sigma(P) = \sqrt{3} = 1.71$ è la deviazione standard, cioè il numero medio di abitanti colpiti dalla malattia è 3 con una variazione media rispetto a 3 di 1.71 abitanti.

2.4.2 Esercizi

Esercizio 2.4.1. Studiare l'andamento della v.c. di Poisson e determinarne gli indici nei casi:

a) $0 < \lambda < 1$

b) $\lambda = 1$

c) $\lambda > 1$ studiare i due casi: λ intero e non

Esercizio 2.4.2. Un evento ha probabilità 0.008 di verificarsi. Calcolare la probabilità che, su 6 prove, si verifichi esasttamente 3 volte e la probabilità che si verifichi almeno una volta. Confrontare i risultati utilizzando anche la distribuzione binomiale.

Esercizio 2.4.3. In un file di testo di 1000 pagine sono contenuti 600 refusi. Calcolare:

1. il numero medio di refusi per pagina
2. il numero più probabile di refusi in una e in 15 pagine
3. la probabilità che in una pagina non vi sia alcun errore
4. la probabilità che in una pagina vi siano al massimo 3 errori
5. la deviazione standard del numero di errori in una pagina.

Esercizio 2.4.4. Allo sportello Bancomat di una banca arrivano mediamente 15 persone all'ora. Calcolare:

1. il numero medio di persone che arrivano allo sportello in 10 minuti
2. la probabilità che in 10 minuti arrivino più di 3 persone
3. la probabilità che 10 minuti non arrivi alcuna persona
4. il numero più probabile di clienti in 10 minuti e la deviazione standard del numero di arrivi nello stesso intervallo di tempo.

Esercizio 2.4.5. Una sorgente radioattiva emette in media 5 fotoni γ al secondo; l'emissione segue una distribuzione di Poisson. Calcolare la probabilità che:

1. vengano emessi esattamente 5 fotoni in un secondo
2. non venga emesso alcun fotone in un secondo
3. non venga emesso alcun fotone in 2 secondi consecutivi
4. vengano emessi 2 fotoni (in totale) in 2 secondi consecutivi.

2.4.3 Processo di Arrivi di Poisson

Per *arrivo* si intende un qualsiasi evento casuale che si realizza in un determinato sistema di riferimento.

Un *processo di arrivi* è un flusso di eventi casuali che si realizzano in un determinato sistema di riferimento.

Se,come avviene spesso, il sistema di riferimento è temporale, il flusso si concretizza in una successione di eventi casuali associati a determinati istanti di tempo.

Esempi

1. Processo : telefonate che vengono ricevute da un centralino nella mattinata di oggi Arrivo : telefonata ricevuta dal centralino Sistema di riferimento temporale (una dimensione) Casualità : si riferisce all?istante in cui la telefonata viene ricevuta dal centralino

2. Processo : presenza di un cartellone pubblicitario su un certo tratto di strada rettilineo Arrivo : presenza del cartellone pubblicitario Sistema di riferimento cartesiano sulla retta (una dimensione) Casualità : si riferisce al punto della strada al lato della quale è posizionato il cartellone pubblicitario

3. Processo : presenza di piante di una determinata specie in un bosco spontaneo Arrivo : presenza di una pianta della determinata specie Sistema di riferimento cartesiano nel piano (due dimensioni) Casualità : si riferisce al punto del bosco nel quale è presente la pianta

4. Processo : presenza di particelle in sospensione in una soluzione acquosa Arrivo : presenza della particella Sistema di riferimento cartesiano nello spazio (tre dimensioni) Casualità : si riferisce al punto della soluzione nel quale è sospesa la particella.

Nella maggior parte dei casi, i processi di arrivi si intendono riferiti al tempo e quindi hanno un sistema di riferimento lineare.

In questo caso gli arrivi si possono rappresentare come punti che si distribuiscono a caso sulla retta del tempo.

Ebbene, sotto condizioni abbastanza semplici, si può dimostrare che una distribuzione di arrivi casuali in un certo intervallo di tempo segue la legge di Poisson.

Siano infatti :

$$
\begin{aligned}
t &: \text{ l'ampiezza di un generico intervallo di tempo} \\
x &: \text{ il numero di arrivi nell'intervallo di tempo } t \\
& \quad \text{cioè il numero di punti sul segmento di ampiezza } t \\
p_x(t) &: \text{ la probabilità che nell?intervallo di tempo } t \text{ vi siano } x \text{ arrivi} \\
\lambda &: \text{ il numero medio di arrivi nell'unità di tempo } (t = 1)
\end{aligned}
$$

X è allora una variabile casuale discreta così definita:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & x & \cdots \\ p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & \cdots & p_x(t) & \cdots \end{pmatrix}$$

ove

$$p_x(t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

Le semplici condizioni cui deve sottostare il processo sono definite dalle seguenti tre ipotesi:

1. *Ipotesi di uniformità.* La probabilità $p_x(t)$ di avere x arrivi nell'intervallo di ampiezza t dipende solamente dall'ampiezza dell'intervallo t e non dalla sua posizione sull?asse dei tempi. La posizione dell'intervallo di ampiezza t non ha influenza sulla probabilità$p_x(t)$, cioè si può ipotizzare una certa casuale *regolarità* negli arrivi e quindi non se ne prevedono accumulazioni o penurie.

2. *Ipotesi di indipendenza o assenza di memoria.* Gli arrivi si ripartiscono indipendentemente gli uni dagli altri. Ciò significa che in intervalli disgiunti, le variabili casuali che contano il numero di arrivi in ciascuno di essi sono mutuamente indipendenti e non vengono influenzate da quanto accade in precedenza. Per questo motivo si parla di assenza di memoria: tra le variabili discrete, solo il processo di Arrivi di Poisson gode di questa proprietà. Si ricordi che, in caso di indipendenza, le probabilità congiunte sono uguali al prodotto delle probabilità marginali, con notevoli semplificazioni di calcolo.

3. *Ipotesi di ordinarietà.* In un intervallo di tempo sufficientemente piccolo è ammesso al massimo un arrivo. Cioè, in un intervallo infinitesimo di ampiezza o vi è un solo arrivo ($x = 1$) o non ve n'è alcuno ($x = 0$) essendo impossibile che ve ne siano in numero maggiore. In pratica non sono ammessi arrivi simultanei.

Si può concludere quindi con il seguente teorema, del quale si omette la dimostrazione:

Teorema 2.4.2. *Se la variabile casuale x soddisfa le tre ipotesi allora essa si distribuisce come una variabile casuale di Poisson di parametro λ e viceversa.*

Nella teoria delle file d'attesa, uno dei modelli più noti prevede che gli arrivi degli utenti che richiedono un determinato servizio in un intervallo di tempo t sia un processo di Poisson.

Parte I

Contributi

Contributi e licenza

Erica Boatto	Algebra I - Algebra II - Insiemi - Esercizi di geometria metrica
Beniamino Bortelli	Grafici
Roberto Carrer	Coordinatore progetto - Numeri - Funzioni - Algebra Lineare - Integrazione - Matematica 5 - Statistica descrittiva - Sistemi dinamici
Morena De Poli	Laboratorio matematica
Piero Fantuzzi	Algebra I - Algebra II - Insiemi - Esercizi di geometria metrica
Caterina Fregonese	Analisi (Integrazione) - Esercizi
Carmen Granzotto	Funzioni - Analisi (Integrazione)
Franca Gressini	Funzioni - Statistica descrittiva - Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II - Teoria della probabilità III
Beatrice Hitthaler	Funzioni trascendenti - Geometria analitica Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II
Lucia Perissinotto	Funzioni trascendenti - Geometria analitica Numeri complessi - Analisi - Matematica 5 Teoria della probabilità I - Teoria della probabilità II
Pietro Sinico	Geometria I - Geometria II

STUDENTI

Matteo Alessandrini classe VA 2012-2013	Algebra Lineare
Simone Simonella classe IVA 2014-2015	Sistemi dinamici

Dipartimento di
Matematica
ITIS V.Volterra
San Donà di Piave